

# 不同加载条件下平面应力圆盘应力和位移的全场解

董世明, 李一凡, 徐积刚

(四川大学 建筑与环境学院, 四川 成都 610065)

**摘要:** 不同加载条件下平面应力圆盘(简称巴西圆盘)应力场和位移场的研究,对于弹性力学、岩石力学和断裂力学而言具有重要的理论价值和工程实用价值。为得到不同加载条件下巴西圆盘应力场和位移场的数学表达式,依据弹性理论和巴西圆盘集中载荷作用下应力场的幂级数展开式,得到巴西圆盘在集中载荷作用下位移场的数学表达式;通过数理分析得到均布载荷作用下巴西圆盘试件应力场的数学表达式,并获得位移场的数学表达式。计算结果表明: 径向应力 $\sigma_r$ 、周向应力 $\sigma_\theta$ 和径向位移 $u$ 均关于 $\theta = 0$ 轴对称,切应力 $\tau_{r\theta}$ 和切向位移 $v$ 均关于 $\theta = 0$ 轴反对称;在集中力作用点或分布载荷的边界点,应力场发生剧烈变化,位移场只有外围边界处的位移有较大变化,因此相同条件下,载荷类型对应力场的影响要大于对位移场的影响;另一方面,载荷类型的不同只对其作用点或作用区间附近(即 $\rho$ 较大时)的应力场或位移场有重要影响,对离载荷作用点或作用区间较远的地方(即 $\rho$ 较小时)的应力场或位移场影响极小,这一结论与圣维南原理完全一致。此外,径向位移 $u$ 随 $\rho$ 的增大而增大,切向位移 $v$ 在 $\rho = 0.7$ 附近较大,在圆盘的中心和四周均较小。进一步的分析结果表明,国外有关学者所得均布载荷作用下巴西圆盘应力场的幂级数公式可进一步化简、合并,本文结果是均布载荷作用下巴西圆盘应力场的最简洁形式。

**关键词:** 平面应力;巴西圆盘;应力;位移;幂级数解

中图分类号: O343.1

文献标志码: A

文章编号: 2096-3246(2017)02-0054-08

## Full-field Solutions to Stresses and Displacements in the Plane Stress Disk Under Different Loading Conditions

DONG Shiming, LI Yifan, XU Jigang

(College of Architecture and Environment, Sichuan Univ., Chengdu 610065, China)

**Abstract:** Investigation on the stress displacement field for the plane stress disk, which is also called the Brazilian disk, has an important theoretical and practical value for elastic mechanics, rock mechanics and fracture mechanics. In order to obtain the closed-form solution to stresses and displacements in the Brazilian disk under different loading conditions, based on the theory of elasticity and a series solution of stress for the Brazilian disk subjected to a pair of compressive forces, the explicit expressions of displacements were obtained for the Brazilian disk under diametral-compression loading. The series solutions to stresses were then derived by using mathematical analysis method and the explicit expressions of displacements were obtained subjected to uniformly distributed pressure. The calculated results showed that the stresses  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$  and radial displacement  $u$  were symmetric to the loading line  $\theta = 0$ , and the stress  $\tau_{r\theta}$  and tangential displacement  $v$  were anti-symmetric to  $\theta = 0$ . At the loading point of a concentrated force and the starting point or the end point of the distributed pressure, the stress field and displacement field had a abrupt change. For the same condition, the effect of the loading types on the displacements was less than that on the stresses. On the other hand, the loading type only had an important effect on the stress or displacement distributions near the loading point (i. e., when  $\rho$  was larger), and the effect on the stress or displacement distributions was very small at points away from the loading point or loading range (i. e., when  $\rho$  is smaller). This conclusion agreed well with the Saint-Venant principle. In addition, the radial displacement increased with the increase of  $\rho$ , and it had a maximum value near  $\rho = 0.7$ . The further analysis showed that the series formula obtained by other researcher can be simplified and combined, and the formula derived from the present paper is the simplest form for the Brazilian disk loaded by pressure.

**Key words:** plane stress; Brazilian disk; stress; displacement; series solution

收稿日期: 2015-10-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11172186)

作者简介: 董世明(1963—), 男, 教授。研究方向: 断裂力学; 冲击动力学。E-mail: smdong@scu.edu.cn

平面应力圆盘的应力分析是弹性理论的经典问题<sup>[1]</sup>,有很多学者曾对此问题进行分析研究。在平面应力圆盘应力分析的基础上,研究者们提出了巴西圆盘试验(Brazilian disk test)方法。该方法最早由 Akazawa<sup>[2]</sup>和 Carneiro 等<sup>[3]</sup>提出,Fairhurst<sup>[4]</sup>对该方法的有效性进行了论证。巴西圆盘试验的主要优点是试件加工方便,试验易于实现等。巴西圆盘试验方法是国际岩石力学协会(ISRM)推荐的测量岩石拉伸强度的方法<sup>[5]</sup>,曾被许多研究人员用于测量岩石、陶瓷和混凝土等脆性材料的间接拉伸强度。Mellor 等<sup>[6]</sup>曾使用巴西圆盘和圆环试件研究3种岩石、2种塑料、玻璃和冰的拉伸强度。Chen<sup>[7]</sup>和 Zhao<sup>[8]</sup>等利用巴西圆盘试件研究岩石的变形、拉伸强度或动态拉伸性能。Gomez 等<sup>[9]</sup>利用巴西圆盘试件研究混凝土和花岗岩的准静态和动态力学性能。Dong 等<sup>[10]</sup>使用巴西圆盘试件研究玻璃陶瓷拉伸强度的率相关性。此外,也有其他学者使用巴西圆盘试件测量弹性模量和泊松比等材料性能参数<sup>[11-12]</sup>。

20世纪中叶,随着断裂力学的兴起,研究者们试图将含有中心裂纹的巴西圆盘试件用于研究脆性材料复合型断裂问题。在研究中心裂纹圆盘的应力强度因子时,需要对无裂纹圆盘的应力分量进行幂级数展开,尽管国外有些学者对此问题进行过分析、研究<sup>[13]</sup>,但仅得到一个关于 $\sigma_\theta$ 和 $\tau_{r\theta}$ 的5项和近似公式,不仅展开式形式复杂,系数没有通解,而且还没有 $\sigma_r$ 的幂级数展开式。为全面得到巴西圆盘应力分量的幂级数展开式,并有效地提高幂级数解的计算精度,Dong 等<sup>[14]</sup>在巴西圆盘应力分量解析解的基础上,通过数学分析得到集中载荷作用下圆盘应力分量的幂级数全场解,但未对位移场进行分析。本文在集中载荷作用下巴西圆盘应力分量幂级数全场解的基础上对圆盘的位移场进行分析,同时对均布载荷作用下巴西圆盘的应力场和位移场进行分析、研究。

## 1 集中载荷作用下巴西圆盘的应力和位移分析

如图1所示,厚度为 $B$ 、半径为 $R$ 的平面应力圆盘,在径向承受一对集中载荷 $P$ 作用,假设圆盘为各向同性材料并服从小变形假设。根据弹性理论<sup>[1]</sup>可以得到圆盘应力分量的极坐标表达式为:

$$\sigma_\theta = 2\sigma \left[ \frac{1}{2} - \frac{(1 - \rho \cos \theta) \sin^2 \theta}{(1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2)^2} - \frac{(1 + \rho \cos \theta) \sin^2 \theta}{(1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2)^2} \right] \quad (1)$$

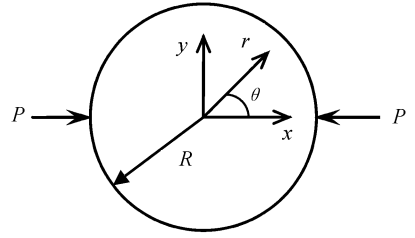


图1 圆盘受力示意

Fig.1 Diagram of disk subjected to forces

$$\sigma_r = 2\sigma \left[ \frac{1}{2} - \frac{(1 - \rho \cos \theta) (\cos \theta - \rho)^2}{(1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2)^2} - \frac{(1 + \rho \cos \theta) (\cos \theta + \rho)^2}{(1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2)^2} \right] \quad (2)$$

$$\tau_{r\theta} = 2\sigma \sin \theta \left[ \frac{(1 - \rho \cos \theta) (\cos \theta - \rho)}{(1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2)^2} + \frac{(1 + \rho \cos \theta) (\cos \theta + \rho)}{(1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2)^2} \right] \quad (3)$$

其中:

$$\rho = \frac{r}{R}, \sigma = \frac{P}{\pi BR} \quad (4)$$

当 $\theta = 0$ ,即沿力 $P$ 的作用线方向。此时, $y = 0$ , $r = x, \rho = x/R$ ,

$$\sigma_x = \sigma \left[ 1 - \frac{4}{1 - \rho^2} \right], \sigma_y = \sigma, \tau_{xy} = 0 \quad (5)$$

式(5)即为巴西圆盘试验的理论基础。试验时(载荷 $P$ 沿铅垂方向)通过记录的载荷位移曲线( $P - \Delta$ 曲线)可以得到最大载荷 $P_{\max}$ ,进而得到脆性材料的拉伸强度为:

$$\sigma_t = \sigma_{\max} = \frac{P_{\max}}{\pi BR} \quad (6)$$

为得到圆盘应力分量的幂级数全场解,Dong 等<sup>[14]</sup>将 $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 和 $\sigma_r$ 进行幂级数展开。经过一系列复杂的数学运算后,最终得到 $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 和 $\sigma_r$ 的幂级数展开式及其系数 $A_{ji}(j = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, n)$ 的数学表达式为<sup>[14]</sup>:

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \sigma \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^n A_{1i}(\theta) \rho^{2(i-1)} \right), \\ A_{1i}(\theta) = i \cos(2i\theta) - i \cos(2(i-1)\theta) \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \tau_{r\theta} = 2\sigma \sum_{i=1}^n A_{2i}(\theta) \rho^{2(i-1)}, \\ A_{2i}(\theta) = i \sin(2i\theta) - (i-1) \sin(2(i-1)\theta) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma \left( 1 - 2 \sum_{i=1}^n A_{3i}(\theta) \rho^{2(i-1)} \right), \\ A_{3i}(\theta) = i \cos(2i\theta) - (i-2) \cos(2(i-1)\theta) \end{cases} \quad (9)$$

为方便分析,对式(7)~(9)无量纲化处理:

$$F_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma} = 1 + 2 \sum_{i=1}^n A_{1i}(\theta) \rho^{2(i-1)} \quad (10)$$

$$F_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{\sigma} = 2 \sum_{i=1}^n A_{2i}(\theta) \rho^{2(i-1)} \quad (11)$$

$$F_r = \frac{\sigma_r}{\sigma} = 1 - 2 \sum_{i=1}^n A_{3i}(\theta) \rho^{2(i-1)} \quad (12)$$

由此,依据式(10)~(12)可计算集中荷载作用下巴西圆盘的应力场。设加载角 $\theta$ 为 $[-\pi/2, \pi/2]$ ,集中力作用下无量纲应力场的变化情况如图2所示。

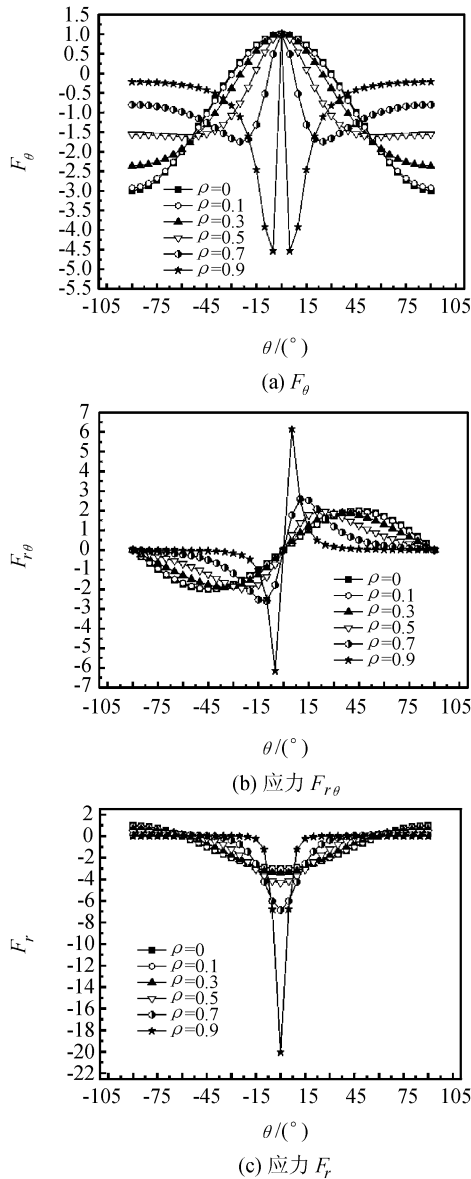


图2 集中荷载作用下巴西圆盘的无量纲应力场

Fig. 2 Dimensionless stress field of Brazilian disk under concentrated load

从图2可以看出,  $F_r$ 、 $F_\theta$  关于  $\theta = 0$  轴对称,  $F_{r\theta}$  关于  $\theta = 0$  轴反对称; 在集中力加载位置( $0^\circ$ )附近,

应力波动明显,这是由于此处出现了应力集中。

在式(7)~(9)的基础上,根据胡克定律和几何方程,有:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu \sigma_\theta], \quad (13)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu \sigma_r]$$

根据对称性,在圆心处,  $\rho = 0, u = 0, v = 0$ , 最后得到:

$$u = \frac{R\sigma}{E} \left[ (1 - \mu)\rho - 2 \sum_{i=1}^n \frac{A_{3i} + \mu A_{1i}}{2i - 1} \rho^{2i-1} \right] \quad (14)$$

$$v = \frac{2R\sigma}{E} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{i}{2i - 1} (1 + \mu) \sin(2i\theta) - \frac{i + 1 + (i - 1)\mu}{2i - 1} \sin(2(i - 1)\theta) \right] \rho^{2i-1} \quad (15)$$

对式(14)~(15)中的位移进行无量纲化:

$$F_u = \frac{Eu}{R\sigma} = (1 - \mu)\rho - 2 \sum_{i=1}^n \frac{A_{3i} + \mu A_{1i}}{2i - 1} \rho^{2i-1} \quad (16)$$

$$F_v = \frac{Ev}{R\sigma} = 2 \sum_{i=1}^n \left[ \frac{i}{2i - 1} (1 + \mu) \sin(2i\theta) - \frac{i + 1 + (i - 1)\mu}{2i - 1} \sin(2(i - 1)\theta) \right] \rho^{2i-1} \quad (17)$$

根据式(16)~(17)可计算集中荷载作用下圆盘的无量纲位移场。假设泊松比  $\mu = 0.25$ ,  $\theta$  为  $[-\pi/2, \pi/2]$  时集中荷载作用下无量纲位移场的计算结果如图3所示。

从图3可以看出,位移  $u$  关于  $\theta = 0$  轴对称,位移  $v$  关于  $\theta = 0$  轴反对称;在集中力加载位置( $0^\circ$ )附近位移变化幅度比较大,这显然与此处的应力集中相关;径向位移  $F_u$  随  $\rho$  的增大而增大,环向位移在  $\rho = 0.7$  附近较大,在圆盘的中心和四周均较小。

## 2 分布荷载作用下巴西圆盘的应力和位移分析

如图4所示,假设沿合力作用线将力  $P$  对称均匀分解成角度为  $2\gamma$  的径向分布荷载  $\sigma_0$ ,合力作用线沿水平方向,其余条件不变。则根据力的平衡条件:

$$P = B \int_{-\gamma}^{\gamma} R \sigma_0 \cos \theta d\theta = 2BR\sigma_0 \sin \gamma$$

$$\text{得} \quad \sigma_0 = \frac{P}{2BR \sin \gamma} = \frac{\pi \sigma}{2 \sin \gamma} \quad (18)$$

在径向分布荷载  $\sigma_0$  的作用区间上,任取一微小小区间  $d\theta$ ,其上作用力为  $dF = BR\sigma_0 d\theta$ ,依式(7)~(9), $dF$  所产生的应力场为:

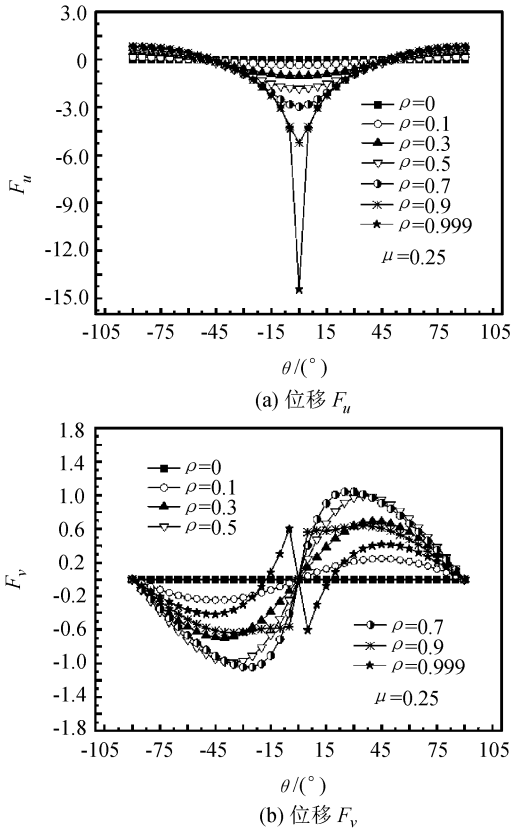


图3 集中荷载作用下巴西圆盘无量纲位移场  
Fig.3 Dimensionless displacement field of Brazilian disk under concentrated load

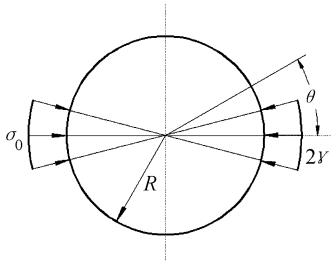


图4 分布荷载作用下的巴西圆盘试件  
Fig.4 Brazilian disk subjected to pressure

$$\left\{ \begin{aligned} d\sigma_\theta &= \frac{dF}{\pi BR} \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^n A_{1i}(\theta) \rho^{2(i-1)} \right) = \\ & \frac{\sigma d\theta}{2 \sin \gamma} \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^n A_{1i} \rho^{2(i-1)} \right), \\ d\tau_{r\theta} &= 2 \frac{dF}{\pi BR} \sum_{i=1}^n A_{2i}(\theta) \rho^{2(i-1)} = \\ & \frac{\sigma d\theta}{\sin \gamma} \sum_{i=1}^n A_{2i} \rho^{2(i-1)}, \\ d\sigma_r &= \frac{dF}{\pi BR} \left( 1 - 2 \sum_{i=1}^n A_{3i}(\theta) \rho^{2(i-1)} \right) = \\ & \frac{\sigma d\theta}{2 \sin \gamma} \left( 1 - 2 \sum_{i=1}^n A_{3i} \rho^{2(i-1)} \right) \end{aligned} \right. \quad (19)$$

积分后,得到分布荷载作用下圆盘的应力全场

解为:

$$\sigma_\theta^* = \sigma \left( \frac{\gamma}{\sin \gamma} + \frac{1}{\sin \gamma} \sum_{i=1}^n B_{1i} \rho^{2(i-1)} \right) \quad (20)$$

$$\tau_{r\theta}^* = \frac{\sigma}{\sin \gamma} \sum_{i=1}^n B_{2i} \rho^{2(i-1)} \quad (21)$$

$$\sigma_r^* = \sigma \left( \frac{\gamma}{\sin \gamma} - \frac{1}{\sin \gamma} \sum_{i=1}^n B_{3i} \rho^{2(i-1)} \right) \quad (22)$$

其中, \* 表示与集中荷载作用下的区别,角度系数  $B_{1i}$ 、 $B_{2i}$ 、 $B_{3i}$  的数学表达式为:

$$B_{1i} = \int_{\theta-\gamma}^{\theta+\gamma} A_{1i}(\theta) d\theta = \cos(2i\theta) \sin(2i\gamma) - \frac{i}{i-1} \cos[2(i-1)\theta] \sin[2(i-1)\gamma] \quad (23)$$

$$B_{2i} = \int_{\theta-\gamma}^{\theta+\gamma} A_{2i}(\theta) d\theta = \sin(2i\theta) \sin(2i\gamma) - \sin[2(i-1)\theta] \sin[2(i-1)\gamma] \quad (24)$$

$$B_{3i} = \int_{\theta-\gamma}^{\theta+\gamma} A_{3i}(\theta) d\theta = \cos(2i\theta) \sin(2i\gamma) - \frac{i-2}{i-1} \cos[2(i-1)\theta] \sin[2(i-1)\gamma] \quad (25)$$

当  $i = 1$  时,由于  $\lim_{i \rightarrow 1} \frac{\sin[2(i-1)\gamma]}{i-1} = 2\gamma$ , 故

$$\begin{cases} B_{11} = \cos(2\theta) \sin(2\gamma) - 2\gamma, \\ B_{31} = \cos(2\theta) \sin(2\gamma) + 2\gamma \end{cases} \quad (26)$$

同集中荷载作用下的应力场一样,先将式(20)~(22)的应力场进行无量纲化:

$$F_\theta^* = \frac{\sigma_\theta^*}{\sigma} = \frac{\gamma}{\sin \gamma} + \frac{1}{\sin \gamma} \sum_{i=1}^n B_{1i} \rho^{2(i-1)} \quad (27)$$

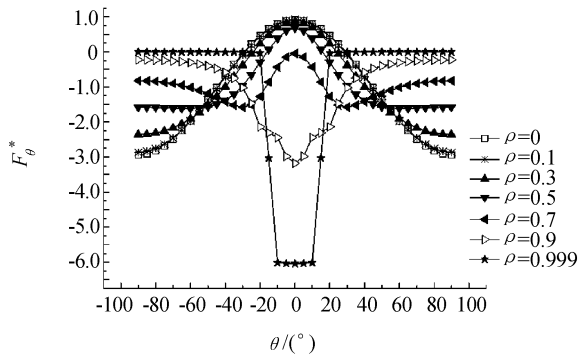
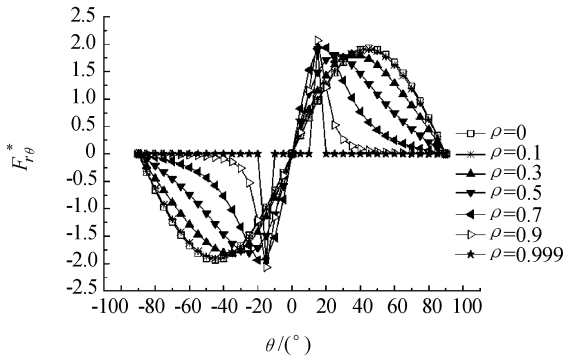
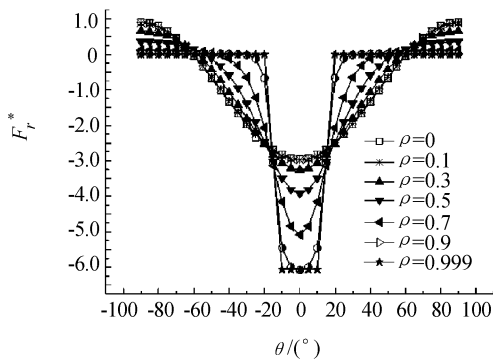
$$F_{r\theta}^* = \frac{\tau_{r\theta}^*}{\sigma} = \frac{1}{\sin \gamma} \sum_{i=1}^n B_{2i} \rho^{2(i-1)} \quad (28)$$

$$F_r^* = \frac{\sigma_r^*}{\sigma} = \frac{\gamma}{\sin \gamma} - \frac{1}{\sin \gamma} \sum_{i=1}^n B_{3i} \rho^{2(i-1)} \quad (29)$$

依据式(27)~(29)可以计算不同分布荷载下圆盘内部的无量纲应力场。假设加载角  $\theta$  为  $[-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\gamma = \pi/12$ , 分布荷载作用下无量纲应力场如图5所示。

从图5可以看出:  $F_\theta^*$  和  $F_r^*$  均关于  $\theta = 0$  轴对称,  $F_{r\theta}^*$  关于  $\theta = 0$  轴反对称。由于  $\gamma = \pi/12$ , 在分布荷载作用区间内(即  $\theta$  为  $[-15^\circ, 15^\circ]$ ), 应力没有剧烈变化, 在  $\theta = \pm 15^\circ$  时, 应力  $F_\theta^*$ 、 $F_{r\theta}^*$  和  $F_r^*$  均有剧烈变化, 这和集中力作用点附近应力集中情况相类似, 但程度有所降低。

此外, 为分析荷载类型对巴西圆盘应力场的影响, 以  $\rho = 0.3$  和  $\rho = 0.7$  为例, 计算  $\theta$  为  $[-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\gamma = \pi/12$  时的  $F_\theta^*$ 、 $F_{r\theta}^*$  和  $F_r^*$ , 其结果如图6所示。

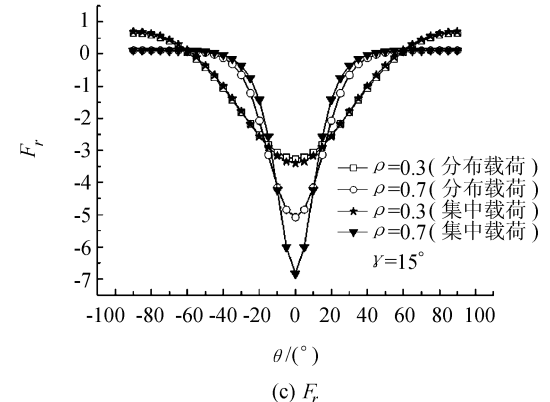
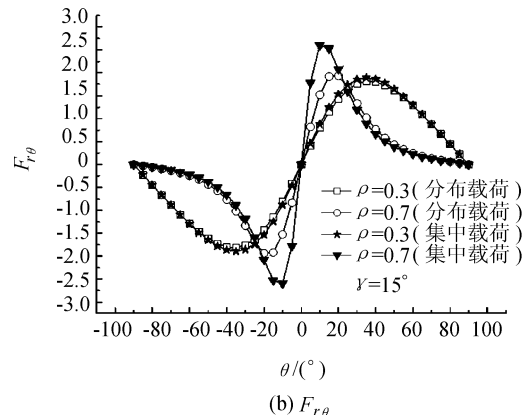
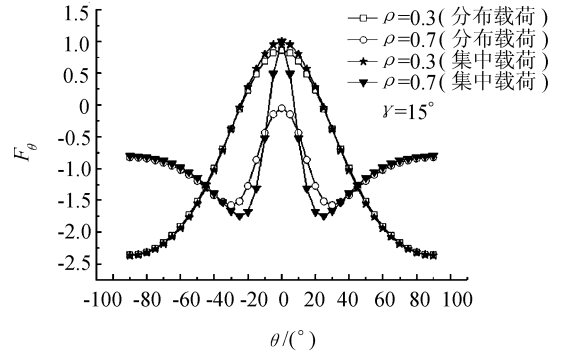
(a) 应力  $F_{\theta}^*$ (b) 应力  $F_{r\theta}^*$ (c) 应力  $F_r^*$ 图5  $\gamma = \pi/12$  时的无量纲应力场Fig.5 Dimensionless stress field with  $\gamma = \pi/12$ 

需要指出的是  $\rho = 0.999$  时, 计算求和的总项数取为  $n = 3\ 000$ , 其他情况取  $n = 200$ 。

图6表明, 载荷类型的不同只对其作用点或作用区间附近(即  $\rho$  较大时)的应力场有重要影响, 对离载荷作用点或作用区间较远处(即  $\rho$  较小时)的应力场影响极小。这一结论与圣维南原理完全一致。

为分析分布角对应力变化情况的影响, 以无量纲应力  $F_{\theta}^*$  和  $F_{r\theta}^*$  为例, 计算其在分布角分别为  $\gamma = \pi/12, \pi/6, \pi/4$  时  $\rho = 0.2, 0.9$  两条环线上应力大小的变化情况, 结果如图7所示。

从图7可以看出: 应力随着分布角的增大而减小; 在分布载荷作用区间, 应力波动变化平缓, 但在分布载荷的起点和终点处, 即  $\theta = \pm \gamma$  时, 应力(尤

图6 载荷类型对  $F_{\theta}$ 、 $F_{r\theta}$  和  $F_r$  的影响Fig.6 Influence of load type on  $F_{\theta}$ 、 $F_{r\theta}$  and  $F_r$ , 其是  $F_{r\theta}$  变化较为剧烈。

得到应力场后, 按式(13) 计算位移场, 根据对称性, 在圆心处  $\rho = 0, u^* = 0, v^* = 0$ , 最后得到:

$$u^* = \frac{R\sigma}{E\sin\gamma} \left[ (1-\mu)\gamma\rho - \sum_{i=1}^n \frac{B_{3i} + \mu B_{1i}}{2i-1} \rho^{2i-1} \right] \quad (30)$$

$$v^* = \frac{R\sigma}{E\sin\gamma} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1+\mu}{2i-1} \sin(2i\theta) \sin(2i\gamma) - \left( \frac{i+1}{i-1} + \mu \right) \frac{\sin(2(i-1)\theta) \sin(2(i-1)\gamma)}{2i-1} \right] \rho^{2i-1} \quad (31)$$

将式(30) ~ (31) 无量纲化, 可以计算不同分布角下的无量纲位移场。

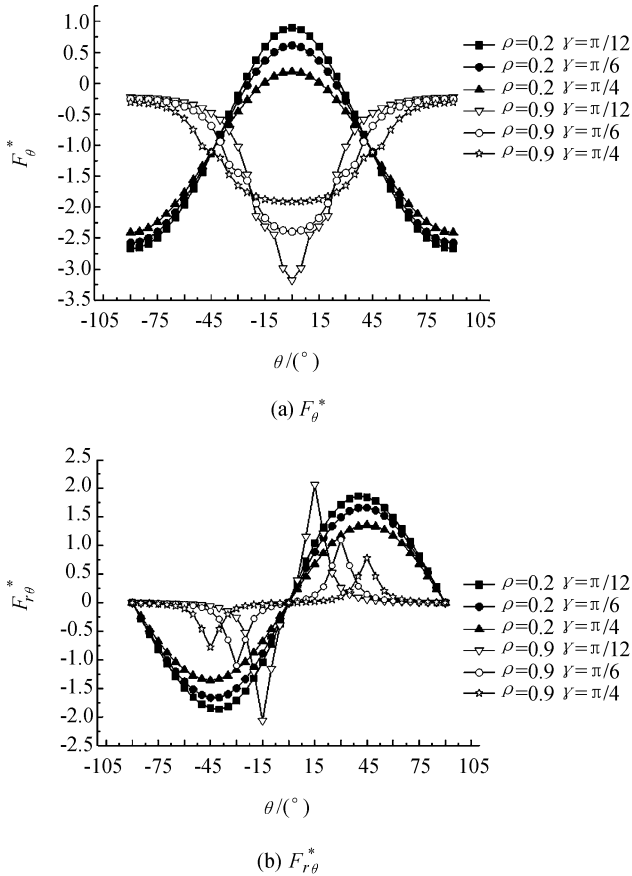


图7 不同分布角下的无量纲应力对比图

Fig.7 Dimensionless stress comparison at different distribution angles

$$F_u^* = \frac{Eu^*}{R\sigma} = \frac{1}{\sin\gamma} \left[ (1-\mu)\gamma\rho - \sum_{i=1}^n \frac{B_{3i} + \mu B_{1i}}{2i-1} \rho^{2i-1} \right] \quad (32)$$

$$F_v^* = \frac{Ev^*}{R\sigma} = \frac{1}{\sin\gamma} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1+\mu}{2i-1} \sin(2i\theta) \sin(2i\gamma) - \left( \frac{i+1}{i-1} + \mu \right) \frac{\sin(2(i-1)\theta) \sin(2(i-1)\gamma)}{2i-1} \right] \rho^{2i-1} \quad (33)$$

依据式(32) ~ (33) 计算泊松比  $\mu = 0.25$ , 分布角为  $\gamma/12$  时圆盘内部  $[-\pi/2, \pi/2]$  角度范围内位移  $F_u^*$ 、 $F_v^*$  的变化情况, 结果如图8所示。

从图8可以看出: 位移  $F_u^*$  关于  $\theta = 0$  轴对称, 位移  $F_v^*$  关于  $\theta = 0$  轴反对称; 径向位移  $F_u^*$  随  $\rho$  的增大而增大, 环向位移  $F_v^*$  在  $\rho = 0.7$  附近较大, 在圆盘的中心和四周均较小, 其结论与集中力作用时的情况完全相同; 除  $\rho = 0.999$  时的  $F_v^*$  外, 其余各点位移在  $\theta = \pm\gamma$  处并无显著变化。

为分析载荷类型对巴西圆盘无量纲位移场的影响, 以  $\rho = 0.3$  和  $\rho = 0.7$  为例, 对比  $\theta$  为  $[-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\mu = 0.25, \gamma/12$  时的  $F_u$  和  $F_v$ , 其结果如图9所示。

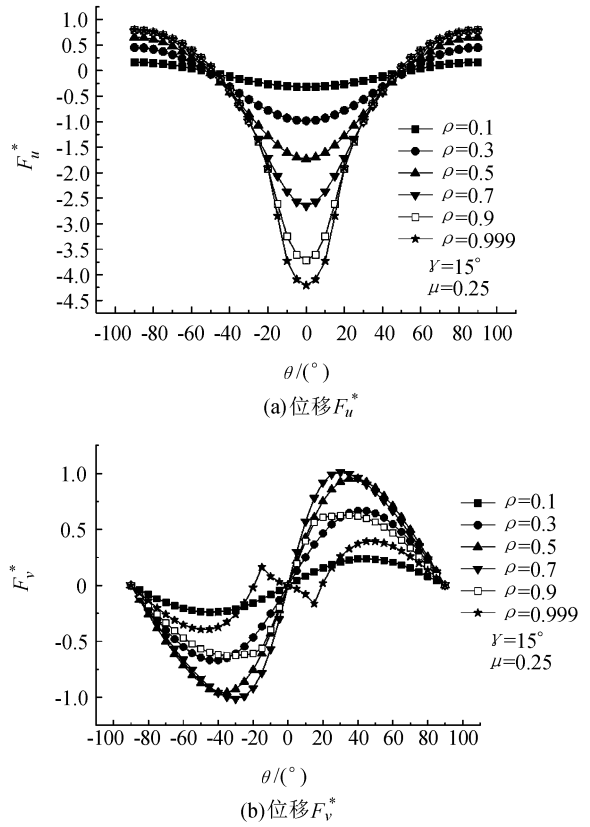


图8  $\gamma = \pi/12$  时的无量纲位移场

Fig.8 Dimensionless displacement field for  $\gamma = \pi/12$

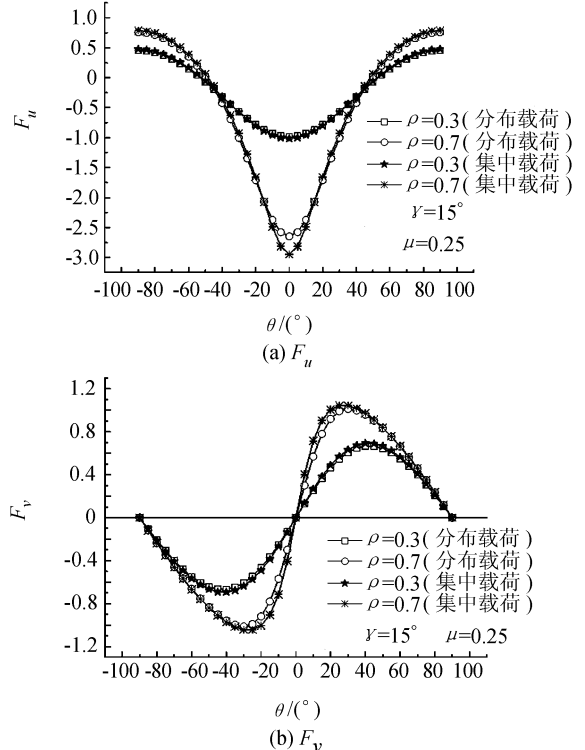


图9 载荷类型对无量纲位移场的影响

Fig.9 Dimensionless influence of load type on displacement field

从图9可以看出, 载荷类型的不同只对其作用

点或作用区间附近(即 $\rho$ 较大时)的位移场有重要影响,而对离载荷作用点或作用区间较远处(即 $\rho$ 较小时)的位移场影响极小。这一结论再次证明了圣维南原理的正确性。此外,对比图6和9发现,载荷类型(或静力等效原理)对应力场的影响要大于对位移场的影响。

### 3 结果讨论

#### 3.1 对载荷分布角 $\gamma$ 的讨论

1) 当 $\gamma \rightarrow 0$ 时,由于 $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\sin \gamma} = 1$ ,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{B_{1i}}{\sin \gamma} = 2i \cos(2i\theta) - 2i \cos[2(i-1)\theta] = 2A_{1i},$$

$$\text{故 } \sigma_{\theta}^* = \sigma(1 + 2 \sum_{i=1}^n A_{1i}(\theta) \rho^{2(i-1)}) = \sigma_{\theta 0}.$$

同理可证:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{B_{2i}}{\sin \gamma} = 2A_{2i}, \tau_{r\theta}^* = \tau_{r\theta 0}, \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{B_{3i}}{\sin \gamma} = 2A_{3i}, \sigma_r^* =$$

$$\sigma_r, u^* = u, v^* = v_0.$$

当 $\gamma \neq 0$ 时,  $\sigma_{\theta}^* \neq \sigma_{\theta 0}, \tau_{r\theta}^* \neq \tau_{r\theta 0}, \sigma_r^* \neq \sigma_r,$   
 $u^* \neq u, v^* \neq v_0.$

2)  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ 时,即围压作用下圆盘的应力和位移场。

此时,  $B_{11} = -\pi, B_{21} = 0, B_{31} = \pi, B_{1i} = 0, B_{2i} = 0, B_{3i} = 0 (i=2, 3, \dots, n)$ 。故 $\sigma_{\theta}^* = -\frac{\pi\sigma}{2} = -\sigma_0, \tau_{r\theta}^* = 0,$

$$\sigma_r^* = -\frac{\pi\sigma}{2} = -\sigma_0, u^* = -\frac{\pi R\sigma}{2E}(1-\mu)\rho = -\frac{\sigma_0}{E}(1-\mu)r, v^* = 0.$$

即圆盘中的应力状态相当于静水压力状态,这与弹性力学已有结果完全一致,也从侧面证明了本文结论的正确性。

#### 3.2 与文献结果的比较

Hondros<sup>[11]</sup>对分布载荷作用下的各向同性圆盘进行了受力分析,并使用与本文完全不同的方法得到如下形式的应力场:

$$\sigma_{\theta}^* = -\frac{2p}{\pi} \left\{ \alpha - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rho^2 \right] \rho^{2(n-1)} \sin(2n\alpha) \cos(2n\theta) \right\} \quad (34)$$

$$\tau_{r\theta}^* = \frac{2p}{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [1 - \rho^2] \rho^{2(n-1)} \sin(2n\alpha) \sin(2n\theta) \right\} \quad (35)$$

$$\sigma_r^* = -\frac{2p}{\pi} \left\{ \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \rho^2 \right] \rho^{2(n-1)} \sin(2n\alpha) \cos(2n\theta) \right\} \quad (36)$$

其中, $p$ 相当于本文的 $\sigma_0$ , $\alpha$ 相当于本文的载荷分布角 $\gamma$ 。将式(20)~(25)与式(34)~(36)进行对比,可以看出本文结果与Hondros<sup>[11]</sup>的结果有明显不同。由于本文所得 $\sigma_{\theta}^*, \tau_{r\theta}^*, \sigma_r^*$ 的数学表达式每项均是按照 $\rho$ 的幂级数展开的,但式(34)~(36)中包含两项 $\rho$ 的表达式,即 $\rho^{2n}$ 和 $\rho^{2(n-1)}$ ,假设在式(34)展开式中任取第 $i$ 项和 $i-1$ 项,分别令其为 $a_i$ 和 $a_{i-1}$ ,则有:

$$a_i = \left(1 - \left(1 + \frac{1}{i}\right) \rho^2\right) \rho^{2(i-1)} \sin(2i\alpha) \cos(2i\theta) = \rho^{2(i-1)} \sin(2i\alpha) \cos(2i\theta) - \frac{i+1}{i} \rho^{2i} \sin(2i\alpha) \cos(2i\theta) \quad (37)$$

$$a_{i-1} = \rho^{2(i-2)} \sin(2(i-1)\alpha) \cos(2(i-1)\theta) - \frac{i}{i-1} \rho^{2(i-1)} \sin(2(i-1)\alpha) \cos(2(i-1)\theta) \quad (38)$$

将式(37)~(38)中含有 $\rho^{2(i-1)}$ 的系数进行合并,得到 $\sin(2i\alpha) \cos(2i\theta) - \frac{i}{i-1} \sin(2(i-1)\alpha) \cos(2(i-1)\theta)$ ,即为角度系数 $B_{1i}$ 。

式(20)和(34)中的常数项,即 $\rho$ 的零次幂项,根据式(20)、(26)可知,本文所得 $\sigma_{\theta}^*$ 公式的常数项为 $(\cos(2\theta) \sin(2\gamma) - \gamma) / \sin \gamma$ 。根据式(34)可知,常数项为 $\gamma - \cos(2\theta) \sin(2\gamma)$ 。考虑到 $2p/\pi = \sigma/\sin \gamma$ ,式(34)经进一步化简后,可以简化为式(20)。同理可证,式(35)、(36)的最终简化形式分别为式(21)、(22)。因此,分析结果表明Hondros<sup>[11]</sup>所得应力场是关于 $\rho$ 幂级数的一个非最终解,而本文所得结果是对其结果的简化和升华,也是圆盘应力场关于 $\rho$ 幂级数的最终解。

### 4 结论

依据弹性理论和巴西圆盘集中载荷作用下应力场的幂级数展开式,得到巴西圆盘在集中载荷作用下位移场的数学表达式,进而通过数理分析得到均布载荷作用下巴西圆盘试件应力的全场解,并首次得到位移的全场解。计算结果表明:应力 $\sigma_{\theta}$ 、 $\sigma_r$ 和径向位移 $u$ 均关于 $\theta = 0$ 轴对称,应力 $\tau_{r\theta}$ 和切向位移 $v$ 均关于 $\theta = 0$ 轴反对称;在集中力作用点或分布载荷的边界点,应力场发生剧烈变化,位移场只有外围边界处的位移有较大变化,因此相同条件下,载荷类型对应力场的影响要大于对位移场的影响。此外,径向位移 $u$ 随 $\rho$ 的增大而增大,环向位移在 $\rho = 0.7$ 附近较大,在圆盘的中心和四周均较小。进一步分析表

明,国外有关学者所得均布载荷作用下巴西圆盘应力场的幂级数公式经过进一步的化简、合并后,其最终形式与本文所得结果相同,因而本文所得结果是巴西圆盘应力场的最简洁形式。

#### 参考文献:

- [1] Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of elasticity[M]. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [2] Akazawa T. International association of testing and research laboratories for materials and structures [J]. RILEM Bull, 1953, 13: 13 - 23.
- [3] Carneiro F, Barcellos A. International association of testing and research laboratories for materials and structures[J]. RILEM Bull, 1953, 13: 99 - 125.
- [4] Fairhurst C. On the validity of the Brazilian test for brittle materials[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Science, 1964, 1(4): 535 - 546.
- [5] Bieniawski Z T, Hawkes I. Suggested methods for determining tensile strength of rock materials[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Science, 1978, 15(3): 99 - 103.
- [6] Mellor M, Hawkes I. Measurement of tensile strength by diametric compression of discs and annuli[J]. Engineering Geology, 1971, 5(3): 173 - 225.
- [7] Chen C S, Pan E, Amadei B. Determination of deformability and tensile strength of anisotropic rock using Brazilian tests[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 1998, 35(1): 43 - 61.
- [8] Zhao J, Li H B. Experimental determination of dynamic tensile properties of a granite[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2000, 37(5): 861 - 866.
- [9] Gomez J T, Shukla A, Sharma A. Static and dynamic behavior of concrete and granite in tension with damage [J]. Theoretical & Applied Fracture Mechanics, 2001, 36(1): 37 - 49.
- [10] Dong S M, Xia K W, Huang S, et al. Rate dependence of the tensile and flexural strengths of glass-ceramic Macor [J]. Journal of Materials Science, 2011, 46(2): 393 - 399.
- [11] Hondros G. The evaluation of Poisson's ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the Brazilian (indirect tensile) test with particular reference to concrete[J]. Aust J Appl Sci, 1959, 10(3): 243 - 268.
- [12] Ye J H, Wu F G, Sun J Z. Estimation of the tensile elastic modulus using Brazilian disc by applying diametrically opposed concentrated loads[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2009, 46(3): 568 - 576.
- [13] Atkinson C, Smelser R E, Sanchez J. Combined mode fracture via the cracked Brazilian disk test[J]. International Journal of Fracture, 1982, 18(4): 279 - 291.
- [14] Dong S M, Wang Y, Xia Y M. Stress intensity factors for central cracked circular disk subjected to compression [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2004, 71(7/8): 1135 - 1148.

(编辑 李轶楠)

引用格式: Dong Shiming, Li Yifan, Xu Jigang. Full-field solutions to stresses and displacements in the plane stress disk under different loading conditions[J]. Advanced Engineering Sciences, 2017, 49(2): 54 - 61. [董世明, 李一凡, 徐积刚. 不同加载条件下平面应力圆盘应力和位移的全场解[J]. 工程科学与技术, 2017, 49(2): 54 - 61.]