

# 基于不可逆热力学的形状记忆合金相变塑性统一本构模型研究

陈华燕<sup>1</sup>, 陈成<sup>1</sup>, 曾祥国<sup>1\*</sup>, 陈军<sup>2</sup>, 郭杨<sup>1</sup>

(1. 四川大学 建筑与环境学院, 四川 成都 610065; 2. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094)

**摘要:**为获得能够描述形状记忆 NiTi 合金相变和塑性行为的本构关系, 基于不可逆热力学, 假设 2 个内变量, 分别推导了相变演化规律和塑性演化规律, 以及 NiTi 合金本构模型的主控方程; 将导出的本构方程写成 1 维的增量形式, 编制 Fortran 程序, 并将本构模型进行了程序实现; 结合单轴加载的试验曲线、非线性拟合的方法确定该本构模型的相关参数; 比较试验结果, 验证了该本构模型的合理性。该模型能很好地描述随着载荷不断增加, NiTi 合金表现出的母相弹性、马氏体相变、马氏体弹性及马氏体塑性流动行为; 同时, 对于应变率效应也能够较为理想地描述; 所建立的宏观唯象本构模型, 参数易确定, 为 NiTi 合金在更加苛刻、极端环境下的工程应用奠定基础。

**关键词:**不可逆热力学; 相变演化; 塑性演化; 形状记忆合金; 唯象本构模型

中图分类号: TG113.25

文献标志码: A

## Unified Constitutive Model for Phase Transformation and Plastic Behavior of Shape Memory Alloy Based on the Irreversible Thermodynamics

CHEN Huayan<sup>1</sup>, CHEN Cheng<sup>1</sup>, ZENG Xiangguo<sup>1\*</sup>, CHEN Jun<sup>2</sup>, GUO Yang<sup>1</sup>

(1. College of Architecture and Environment, Sichuan Univ., Chengdu 610065, China;

2. Inst. of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China)

**Abstract:** In order to develop a constitutive relation which is able to describe the phase transition and the plasticity behavior of NiTi alloy, based on the irreversible thermodynamics, two internal variables were assumed to characterize the phase transformation evolution and the plastic evolution respectively, then a master equation was derived. Rewritten in one dimension incremental form, the constitutive model was program implemented with Fortran code, in which the parameters were determined in combining with the uniaxial experiment and the nonlinear fitting. The model validation was carried out by comparing the predicted results with five uniaxial tensile tests under different strain rates, and the results showed that the proposed phenomenological constitutive model can not only describe very well the phenomenon of parent phase transformation and martensite plastic yield, but also the strain rate effect.

**Key words:** irreversible thermodynamics; phase transformation evolution; plastic evolution; shape memory alloy; phenomenological constitutive model

形状记忆合金具有独特的力学性能使其能够在工程中得到特别的应用。细观层面上, 形状记忆合金通过晶体结构的改变, 表现出可恢复的微观相结构转变——相变。在宏观层面上, 其能力表现为 2 个最基本和最独特的性能, 即形状记忆特性和超弹性。形状记忆效应是指, 材料通过改变温度可以恢复由机械加载诱发的大量变形(几乎到 8%); 超弹

性是指, 在较大的温度范围内, 经过相对较高应变水平的加载过程后再卸载, 材料经过迟滞回线, 恢复到初始形状的能力。材料超弹性行为的根本机制是形状记忆合金中的热弹性马氏体能够在 2 种固态相结构奥氏体和马氏体之间进行转换, 而温度和应力都可能诱发形状记忆合金的马氏体相变。

作为形状记忆合金一个十分重要和基础的研究

收稿日期: 2015-08-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(U1430119)

作者简介: 陈华燕(1982—), 女, 讲师, 博士。研究方向: 材料本构关系及其应用; 计算固体力学。E-mail: kay\_chy@126.com

\* 通信联系人 E-mail: Xiangguozeng@scu.edu.cn

内容,本构模型成为了形状记忆合金的研究热点,可分为宏观唯象模型和细观力学模型 2 类<sup>[1]</sup>。

宏观唯象本构模型是建立在试验基础上近似描述材料的宏观力学行为的一类模型,是基于热力学、相变动力学和连续介质力学提出的。由于形式相对简单、易于理解,相关参数可通过试验确定,比细观力学模型更容易嵌入到数值计算方法中,因此,在科技应用中更常采用宏观唯象本构模型。近 20 年来,很多学者采用宏观唯象本构模型,侧重考虑相变演化方程,描述形状记忆合金的超弹性和形状记忆特性。1986 年, Tanaka<sup>[2]</sup> 提出指数型相变方程,建立 1 维唯象增量理论模型。Liang 等<sup>[3]</sup> 采用余弦相变演化方程,给出 1 维全量型本构方程。Brinson<sup>[4]</sup> 将马氏体相变考虑为温度诱发的相变和应力诱发的相变 2 项。Urbano 等<sup>[5]</sup> 用单变体马氏体体积分数和多变体马氏体体积分数 2 个内变量,描述了 NiTi 合金的超弹性行为和形状记忆效应。Lagoudas 等<sup>[6]</sup> 发展了同时考虑超弹性和形状记忆的本构模型,随后基于该模型增加了一个内变量表征自协调马氏体的变化过程。目前宏观唯象本构模型已经被嵌入 ANSYS、ABAQUS、MARC 等大型商用有限元软件中用以描述材料的超弹性。

随着科学技术的不断发展,人们需要材料在更加严苛的极端环境下服役。对形状记忆合金的研究开始注重在经历了母相弹性、马氏体相变、马氏体弹性后更高应力水平作用下的行为,即塑性流动行为<sup>[7-9]</sup>。

本文基于不可逆热力学,假设 2 个内变量,构建能够同时描述形状记忆合金相变行为和塑性行为的宏观唯象本构模型。该模型参数易确定,可方便地应用于实际工程计算。

## 1 模型构建

本构模型的外变量选用应变张量和温度。考虑到 NiTi 合金变形过程中的相变和塑性变形 2 个不可逆过程,因此选用 2 个内变量,分别为表征相变行为的内变量  $\xi$  和表征塑性行为的内变量  $\eta$ 。

设单位质量的 Helmholtz 自由能函数为:

$$\psi = \psi(\varepsilon_{ij}^e, T, \eta, \xi) \quad (1)$$

式中,  $\varepsilon_{ij}^e$  为弹性应变张量,  $T$  为温度。

在等温条件下,根据 Clausius-Duhem 不等式可得:

$$\sigma_{ij}/\dot{\varepsilon}_{ij} - \rho\dot{\psi} \geq 0 \quad (2)$$

式中,  $\varepsilon_{ij}$  为总应变。在小变形假设下,总应变可以写

成弹性应变与非弹性应变之和,其中,非弹性应变包含塑性应变和相变应变 2 部分,即

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{\text{in}} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{\text{tr}} + \varepsilon_{ij}^{\text{p}} \quad (3)$$

式中,  $\varepsilon_{ij}^{\text{in}}$ 、 $\varepsilon_{ij}^{\text{tr}}$  和  $\varepsilon_{ij}^{\text{p}}$  分别为非弹性应变、相变应变和塑性应变。

等温条件下,根据式(1)得:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \dot{\xi} \quad (4)$$

将式(3)~(4)代入式(2)中,则 Clausius-Duhem 耗散不等式为:

$$(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e}) \dot{\varepsilon}_{ij}^e + (\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{tr}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \dot{\xi}) + (\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{p}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \dot{\eta}) \geq 0 \quad (5)$$

假设弹性应变、相变应变、塑性应变相互独立,若式(5)恒成立,则必须有:

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad (6)$$

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{tr}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \dot{\xi} \geq 0 \quad (7)$$

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{p}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \dot{\eta} \geq 0 \quad (8)$$

式(6)表征了弹性应力应变关系,式(7)表征了相变演化规律,式(8)表征了塑性演化规律。Helmoltz 自由能  $\psi$  由弹性自由能  $\psi_e$ 、相变自由能  $\psi_{\text{tr}}$  和塑性自由能  $\psi_{\text{p}}$  共同贡献:

$$\psi = \psi_e + \psi_{\text{tr}} + \psi_{\text{p}} \quad (9)$$

设弹性自由能函数  $\psi_e$  满足:

$$\rho \psi_e = \frac{1}{2} (2\mu \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{ij}^e + \lambda \varepsilon_{kk}^e \varepsilon_{kk}^e) \quad (10)$$

将式(9)~(10)代入式(6),得:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}^e + \lambda \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} \quad (11)$$

式(11)即 Hook 定律,也可以表达为:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = E_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{\text{tr}} - \varepsilon_{kl}^{\text{p}}) \quad (12)$$

式中,  $E_{ijkl}$  为 4 阶的弹性张量。形状记忆合金有奥氏体和马氏体 2 个相态,其中,马氏体还分为孪晶马氏体和退孪晶马氏体。因此,形状记忆合金的弹性张量  $E_{ijkl}$  实际是表征各种相态组合体弹性行为的一个等效弹性张量,应随着相变过程的发生而不断变化,应为马氏体体积分数  $n$  的函数。为便于实现并应用于实际工程中,本文选取了形式较为简单且不失物理含义的 Voigt 格式<sup>[10]</sup>。Voigt 格式认为等效弹性张量在相变过程中由 2 相共同贡献,总的等效弹性张量  $E_{ijkl}(n)$  为奥氏体的弹性张量  $E_{ijkl}^{\text{A}}$  和马氏体弹性张量  $E_{ijkl}^{\text{M}}$  的线性组合,即

$$E_{ijkl}(n) = (1 - n) E_{ijkl}^{\text{A}} + n E_{ijkl}^{\text{M}} \quad (13)$$

根据热力学框架,相变内变量演化必须满足式

$$(7), \text{因此, 首先令 } A = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, A \text{ 为与表示相变的内}$$

变量  $\xi$  相关的广义力,  $\dot{\xi}$  是相变率, 则式(7)也可表述为:

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{tr}} + A \dot{\xi} \geq 0 \quad (14)$$

然后, 令势函数  $\Theta = \Theta(\sigma_{ij}, A)$ , 且:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{tr}} = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma_{ij}} \quad (15)$$

$$\dot{\xi} = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \Theta}{\partial A} \quad (16)$$

式(15)、(16)即为描述相变演化规律的内变量演化方程。将式(15)、(16)代入到式(14)中可得:

$$\dot{\lambda}_1 \left( \sigma_{ij} \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma_{ij}} + A \frac{\partial \Theta}{\partial A} \right) \geq 0 \quad (17)$$

要使得不等式(17)恒成立, 需要构造关于  $\sigma_{ij}$ 、 $A$  是外凸的势函数  $\Theta = \Theta(\sigma_{ij}, A)$ , 且  $\dot{\lambda}_1$  大于0。于是便有相变流动方程为:

$$A = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (18)$$

设 Helmholtz 相变自由能函数的形式为:

$$\rho \psi_{\text{tr}} = \frac{1}{2} k_1 \xi_{ij} \xi_{ij} \quad (19)$$

类比经典 Chaboche 塑性本构模型构造势函数:

$$\Theta = \Theta(\sigma_{ij}, A) = \left[ \frac{3}{2} (s_{ij} - A_{ij}') (s_{ij} - A_{ij}') \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a A_{ij} A_{ij} \quad (20)$$

式中,  $s_{ij}$  为应力偏张量,  $A_{ij}'$  为广义力  $A_{ij}$  的偏量。并构造:

$$\dot{\lambda}_1 = \left( \frac{F_y^{\text{tr}}}{Z_1} \right)^{n_1} \quad (21)$$

式中,  $F_y^{\text{tr}}$  为相变屈服面方程, 屈服面方程形式为:

$$F_y^{\text{tr}} = \sigma_{\text{eq}} - \sigma_s^{\text{tr}}(n) = \sqrt{\frac{3}{2} (s_{ij} - A_{ij}') (s_{ij} - A_{ij}')} - \sigma_s^{\text{tr}}(n) \quad (22)$$

式中,  $n$  为马氏体体积分, 定义其形式为:

$$n = \varepsilon_{\text{eq}}^{\text{tr}} / \varepsilon_m \quad (23)$$

式中:  $\varepsilon_{\text{eq}}^{\text{tr}} = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^{\text{tr}} / \varepsilon_{ij}^{\text{tr}}}$ , 为等效相变应变;  $\varepsilon_m$  为单向加载条件下最大的相变应变, 可以由单调加载下的试验结果确定。

$$\sigma_s^{\text{tr}}(n) = (1 - n) \sigma_s^{\text{tr}} + n \sigma_f^{\text{tr}} \quad (24)$$

式中,  $\sigma_s^{\text{tr}}$  为相变的起始应力,  $\sigma_f^{\text{tr}}$  为相变的结束应

力。

根据 Nemat-Nasser<sup>[11]</sup>、Belyaev<sup>[12]</sup>、吴静<sup>[13]</sup> 等试验结果发现,  $\sigma_s^{\text{tr}}$ 、 $\sigma_f^{\text{tr}}$  与温度及应变率均有关:

$$\begin{cases} \sigma_s^{\text{tr}} = \sigma_{s0}^{\text{tr}} \left[ 1 + C_1 \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] [1 + m_1 (T - T_0)], \\ \sigma_f^{\text{tr}} = \sigma_{f0}^{\text{tr}} \left[ 1 + C_2 \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right] [1 + m_2 (T - T_0)] \end{cases} \quad (25)$$

将式(19)~(24)代入到式(15)~(16)、(18)中, 可得 NiTi 合金的相变演化规律的形式为:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{tr}} = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} \left( \frac{F_y^{\text{tr}}}{Z_1} \right)^{n_1} \frac{s_{ij} - A_{ij}'}{\sigma_{\text{eq}}^{\text{tr}}} \quad (26)$$

并设广义力  $A_{ij}$  的演化方程为:

$$\dot{A}_{ij} = k_1 \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{tr}} - k_2 \dot{\varepsilon}_{\text{eq}}^{\text{tr}} A_{ij} \quad (27)$$

则式(22)~(27)为描述相变的演化方程。

同样地, 塑性演化规律需要满足式(8), 令  $B = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$ ,  $B$  为与内变量  $\eta$  相关的广义力, 则式(8)可表达为:

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{p}} + B \dot{\eta} \geq 0 \quad (28)$$

令势函数  $\Omega = \Omega(\sigma_{ij}, B)$ , 且:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{p}} = \dot{\lambda}_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} \quad (29)$$

$$\dot{\eta} = \dot{\lambda}_2 \frac{\partial \Omega}{\partial B} \quad (30)$$

式(29)~(30)即为描述塑性演化规律的内变量演化方程。将式(29)~(30)代入式(28), 可得:

$$\dot{\lambda}_2 \left( \sigma_{ij} \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} + B \frac{\partial \Omega}{\partial B} \right) \geq 0 \quad (31)$$

要使不等式(31)恒成立, 需构造关于  $\sigma_{ij}$ 、 $B$  是外凸的势函数  $\Omega = \Omega(\sigma_{ij}, B)$ , 且  $\dot{\lambda}_2$  大于0。于是塑性流动方程为:

$$B = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad (32)$$

假设 Helmholtz 塑性自由能函数的形式为:

$$\rho \psi_{\text{p}} = \frac{1}{2} k_2 \eta_{ij} \eta_{ij} \quad (33)$$

并构造势函数:

$$\Omega = \Omega(\sigma_{ij}, B) = \left[ \frac{3}{2} (s_{ij} - B_{ij}') (s_{ij} - B_{ij}') \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} b B_{ij} B_{ij} \quad (34)$$

式中,  $s_{ij}$  为应力偏张量,  $B_{ij}'$  为广义力  $B_{ij}$  的偏量。

并构造:

$$\dot{\lambda}_2 = \left( \frac{F_y^{\text{p}}}{Z_2} \right)^{n_2} \quad (35)$$

式中,  $F_y^p$  为塑性屈服面方程, 屈服面方程形式为:

$$F_y^p = \sigma_{eq}^p - \sigma_y^p - R = \sqrt{\frac{3}{2}(s_{ij} - B_{ij}')/(s_{ij} - B_{ij}')} - \sigma_y^p - R \quad (36)$$

式中:  $\sigma_y^p$  为初始塑性屈服应力, 定义为应变相关的量, 即

$$\sigma_y^p = \sigma_{y0}^p \left( 1 + C_3 \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0} \right) \quad (37)$$

$R$  用于描述各向同性硬化现象, 演化方程为:

$$\dot{R} = m(R_1 - R)\dot{\varepsilon}_{eq}^p \quad (38)$$

式中:  $\dot{\varepsilon}_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^p/\dot{\varepsilon}_{ij}^p}$ , 为等效塑性应变增量;  $m, R_1$  为材料参数, 表征塑性硬化行为。于是可以得到 NiTi 合金的塑性演化规律形式为:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} \left( \frac{F_y^p}{z_2} \right)^{n_2} \frac{s_{ij} - B_{ij}'}{\sigma_{eq}^p} \quad (39)$$

并设广义力  $B_{ij}$  的演化方程为:

$$\dot{B}_{ij} = k_3 \dot{\varepsilon}_{ij}^p - k_4 \dot{\varepsilon}_{eq}^p B_{ij} \quad (40)$$

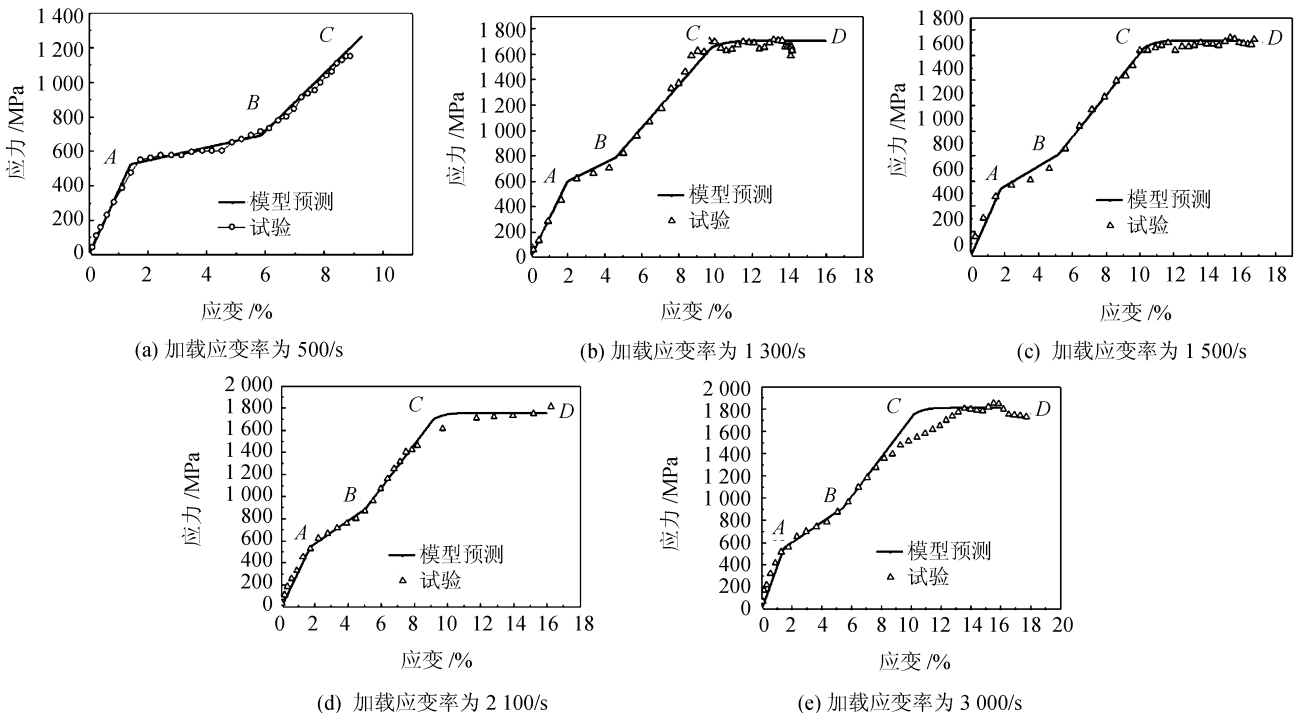


图 1 不同应变率下 NiTi 合金的应力 - 应变曲线

Fig. 1 Stress and strain curves for NiTi alloy at different strain rate

### 3 模拟结果与分析

将建立的本构模型退回到 1 维加载条件下, 则相变演化方程中的式 (22) ~ (24)、(26) ~ (27) 可表达为:

$$F_y^{tr} = \sigma_{11} - A_{11} - \sigma_s^{tr}(n) \quad (41)$$

则式 (36) ~ (40) 描述了相变的演化规律。

## 2 NiTi 合金动态压缩性能试验及结果

利用分离式 Hopkinson 压杆装置, 对 NiTi 合金进行了动态压缩性能的测试。试件为  $\Phi 6 \text{ mm} \times h 3 \text{ mm}$  的扁圆柱形试件。入射杆、透射杆材料为 69Si<sub>2</sub>Mn 弹簧钢, 杆直径为 14.5 mm, 弹性模量 210 GPa, 入射杆长 1 300 mm, 透射杆长 800 mm, 冲击杆长 200 mm。试验之前需要对入射杆、透射杆与试件的接触面涂上油脂, 以减小摩擦, 避免加载过程中由于端面摩擦力的作用对试件横向变形产生约束, 造成试验误差。针对 NiTi 合金, 使用薄纸片做为整形器, 实现恒应变率动态加载。

试验得到了加载应变率为 500、1 300、1 500、2 100、3 000/s 这 5 组试验曲线, 如图 1 所示。整个加载过程中所测得的 NiTi 合金动态试验曲线分成了 4 个阶段: 母相弹性 (OA 段)、相变 (AB 段)、马氏体弹性 (BC 段)、塑性流动 (CD 段)。

$$\sigma_s^{tr}(n) = (1 - n)\sigma_s^{tr} + n\sigma_f^{tr} \quad (42)$$

$$n = \varepsilon_{11}^{tr}/\varepsilon_m \quad (43)$$

$$\dot{\varepsilon}_{11}^{tr} = \left( \frac{F_y^{tr}}{z_1} \right)^{n_1} \quad (44)$$

$$A_{11} = \frac{1}{k_2} (k_1 - e^{-k_2 \varepsilon_{11}^{tr}}) \quad (45)$$

塑性演化方程(36)、(38)~(40)可表达为:

$$F_y^p = \sigma_{11} - B_{11} - \sigma_y^p - R \quad (46)$$

$$\dot{R} = m(R_1 - R)\dot{\varepsilon}_{11}^p \quad (47)$$

$$\dot{\varepsilon}_{11}^p = \left(\frac{F_y^p}{z_2}\right)^{n_2} \quad (48)$$

$$B_{11} = \frac{1}{k_4}(k_3 - e^{-k_4\varepsilon_{11}^p}) \quad (49)$$

建立的本构模型在1维条件下包含的弹性常数参数有母相弹性模量 $E_A$ 、母相泊松比 $\nu_A$ 、马氏体弹性模量 $E_M$ 、马氏体泊松比 $\nu_M$ 。其中, $E_A$ 、 $E_M$ 可根据1维拉伸试验确定,分别为图1中曲线OA段斜率和BC段斜率。泊松比 $\nu_A$ 、 $\nu_M$ 取为0.3。描述相变演化的相关参数有 $\sigma_{s0}^r$ 、 $\sigma_{f0}^r$ 、 $\varepsilon_m$ 、 $k_1$ 、 $k_2$ 、 $z_1$ 、 $n_1$ 、 $C_1$ 、 $C_2$ ,其中: $\sigma_{s0}^r$ 、 $\sigma_{f0}^r$ 分别为相变起始时的应力和相变全部完成时的应力,即分别对应图1曲线中A和B点的应力值; $\varepsilon_m$ 为单轴时的最大应变幅值,取为图1中直线OA和BC之间的应变幅;其余参数由最小二乘法拟合确定。描述塑性演化的相关参数有 $\sigma_{y0}^p$ 、 $k_3$ 、 $k_4$ 、 $z_2$ 、 $n_2$ 、 $C_3$ 、 $R_1$ 、 $m$ ,其中: $\sigma_{y0}^p$ 为马氏体屈服应力,对应图1曲线中C点的应力值;其余参数由最小二乘法拟合确定。

根据图1所示试验结果,确定NiTi合金本构模型中的相关参数,如表1所示。

表1 NiTi合金材料参数

Tab. 1 Material parameters for NiTi alloy

参数	取值	参数	取值
$E_{A0}/\text{MPa}$	37 130	$k_1$	400
$E_{M0}/\text{MPa}$	19 280	$k_2$	800
$\nu_A$	0.3	$k_3$	400
$\nu_M$	0.3	$k_4$	800
$\sigma_{s0}^r/\text{MPa}$	409	$z_1/\text{MPa}$	10
$\sigma_{f0}^r/\text{MPa}$	552	$z_2/\text{MPa}$	170
$\sigma_{y0}^p/\text{MPa}$	1 550	$n_1$	3.0
$\varepsilon_m$	0.034	$n_2$	3.0
$C_1$	0.033 7	$m$	250
$C_2$	0.000 2	$R_1/\text{MPa}$	50
$C_3$	0.000 04		

根据提出的本构模型和表1的相关参数,将NiTi合金的应力-应变曲线预测值重绘于图1。将本构模型的预测值与试验值对比,可以发现加载应变率相对较低(图1(a)~(d))时试验值与模型吻合较好。在整个冲击加载过程中,材料经历了母相弹性阶段、马氏体相变阶段、马氏体弹性变形阶段及

塑性屈服阶段。所发展的本构模型将这4个阶段均拟合地较好,且能够反映材料在不同的应变率下应力-应变曲线的差异,说明该模型和参数能较为合理地给出预测结果。在加载应变率高达3 000/s时,如图1(e)所示,模型预测的塑性屈服及屈服后的流动硬化误差稍大,试验结果的塑性屈服极限值低于模型预测的塑性屈服极限。参考早前研究分析<sup>[14]</sup>,认为造成这个误差的原因可能是:在高应变率下,材料变形可视作绝热过程,塑性功产生的热量来不及耗散,局部变形伴有高的局部升温,对于一般材料而言,升温会引起材料的强度下降,也即所谓的热软化效应。本构模型推导假设在等温条件下,针对高应变率加载情况下,材料不满足等温条件,因此需要进一步借助能量守恒定律对本构模型进行优化。

## 4 结论

基于热力学框架,以不可逆热力学为基础,推导出能够同时描述形状记忆合金的相变行为及塑性行为的动态本构模型。通过将该本构模型写成适合于数值计算的增量形式对试验结果进行模拟,比较发现数值模拟结果与试验结果吻合良好。该模型中提出将等效相变应变占总相变应变的比例作为等效的马氏体体积分数,构造方法简单。模型中涉及的参数有明确物理意义,可由试验获得,易于确定。本文提出的形状记忆合金相变塑性统一本构模型适合推广到工程运用中。

## 参考文献:

- [1] Peng Jianxiang. Comparative study of Johnson-Cook constitutive model and Steinberg constitutive model [D]. Beijing: China Academy of Engineering Physics, 2006. [彭建祥. Johnson-Cook本构模型和Steinberg本构模型的研究[D]. 北京:中国工程物理研究院, 2006.]
- [2] Tanaka K. A thermomechanical sketch of shape memory effect: One-dimensional tensile behavior [J]. Res Mechanica, 1986, 18: 251 - 263.
- [3] Liang C, Rogers C A. A multidimensional constitutive model for shape memory alloys [J]. Applied Mechanics & Materials, 2014, 26(3): 429 - 443.
- [4] Brinson L C. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: Thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite

- internal variable[J]. *Journal of Intelligent Material Systems & Structures*, 1993, 4(2): 229 - 242.
- [5] Urbano M F, Auricchio F. Modeling permanent deformations of superelastic and shape memory materials[J]. *Journal of Functional Biomaterials*, 2015, 6(2): 398 - 406.
- [6] Lagoudas D, Hartl D, Chemisky Y, et al. Constitutive model for the numerical analysis of phase transformation in polycrystalline shape memory alloys[J]. *International Journal of Plasticity*, 2012, 32/33(3): 155 - 183.
- [7] Li H T, Peng X H. Conventional plasticity constitutive model for shape memory alloys[J]. *Advanced Materials Research*, 2011, 216: 469 - 473.
- [8] Cisse C, Zaki W, Zineb T B. A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys[J]. *International Journal of Plasticity*, 2015, 76: 244 - 284.
- [9] Sakhaei A H, Lim K M. Transformation-induced plasticity in high-temperature shape memory alloys: A one-dimensional continuum model[J]. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2015: 1 - 9. DOI:10. 1007/s00161 - 015 - 0450 - 5.
- [10] Saint-Sulpice L, Chirani S A, Calloch S. A 3D super-elastic model for shape memory alloys taking into account progressive strain under cyclic loadings[J]. *Mechanics of Materials*, 2009, 41(1): 12 - 26.
- [11] Nemat-Nasser S, Guo W G. Superelastic and cyclic response of NiTi SMA at various strain rates and temperatures[J]. *Mechanics of Materials*, 2006, 38(5/6): 463 - 474.
- [12] Belyaev S, Razov A, Volkov A, et al. Mechanical properties of titanium nickelide at high strain rate loading[J]. *Materials Science & Engineering: A*, 2004, 378(1/2): 122 - 124.
- [13] Wu Jing, Dynamic mechanics property study of shape memory alloy[D]. Beijing: China Academy of Engineering Physics, 2009. [吴静. 形状记忆合金的动态力学性能研究[D]. 北京: 中国工程物理研究院, 2009.]
- [14] Zeng Xiangguo, Sheng Ying, Han Tixin, et al, Dynamic constitutive relation considering thermo-viscoplasticity for titanium alloy and experimental verification[J]. *Journal of Sichuan University: Engineering Science Edition*, 2014, 46(6): 152 - 157. [曾祥国, 盛鹰, 韩梯信, 等. 考虑热粘塑性钛合金动态本构关系及其实验验证[J]. *四川大学学报: 工程科学版*, 2014, 46(6): 152 - 157.]

(编辑 李轶楠)