

文章编号:1009-3087(2016)03-0136-06

DOI:10.15961/j.jsuese.2016.03.018

基于奇异值分解的测量矩阵优化

张成^{1,2}, 欧书琴^{3*}, 沈川¹, 韦穗¹, 韩超⁴, 夏云⁵

(1. 安徽大学 计算智能与信号处理教育部重点实验室, 安徽 合肥 230039;

2. 安徽省现代成像与显示技术重点实验室, 安徽 合肥 230039; 3. 安徽轻工业技师学院, 安徽 合肥 230601;

4. 安徽工程大学 电气工程学院, 安徽 芜湖 241000; 5. 安徽省地方税务局, 安徽 合肥, 230061)

摘要:针对压缩感知理论中通用的测量矩阵(如随机高斯、伯努利等)不具有最优性能保证的问题,通过引入奇异值分解,提出基于奇异值分解的测量矩阵优化方法。该方法先对压缩感知中一般线性测量模型中的测量矩阵与测量向量进行优化,再利用优化后的测量矩阵与测量向量重建原稀疏信号。经典的随机高斯测量矩阵和伯努利测量矩阵的数值实验结果表明,本文提出的方法可以显著地提高重建成功恢复概率以及对高斯噪声的鲁棒性。该方法适用于一般线性测量系统,成功地实现了测量矩阵和重建矩阵的分离,可在不改变前端测量模型的前提下使重建矩阵接近最优配置。

关键词:压缩感知;稀疏性;测量矩阵;重建矩阵;奇异值分解

中图分类号:TN911.7

文献标志码:A

Optimized Measurement Matrix Based on Singular Value Decomposition

ZHANG Cheng^{1,2}, OU Shuqin^{3*}, SHEN Chuan¹, WEI Sui¹, HAN Chao⁴, XIA Yun⁵

(1. Key Lab. of Intelligent Computing & Signal Processing, Anhui Univ., Hefei 230039, China;

2. Key Lab. of Modern Imaging and Displaying Technol. of Anhui Province, Hefei 230039, China;

3. Anhui Light Industry Polytechnic, Hefei 230601, China;

4. College of Electrical Eng., Anhui Polytechnic Univ., Wuhu 241000, China;

5. Local Taxation Bureau of Anhui Province, Hefei 230061, China)

Abstract: In order to solve the problem raised in compressive sensing theory that the classical measurement matrices (random Gaussian, random Bernoulli, et al.) does not achieve the optimal performance, a novel method was proposed for the measurement matrix optimization based on singular value decomposition. In this method, the singular value decomposition was introduced to optimize the general linear measurement model in compressive sensing, i. e. measurement matrix and corresponded measurement vector, and then the original signal sparse signal was reconstructed by the optimized linear measurement model. Numerical results for the classical random Gaussian measurement matrix and random Bernoulli measurement matrix demonstrated that the proposed method can significantly increase the reconstruction probability of successful recovery and is more robust to Gaussian noise and applicable to the general linear measurement system, which can successfully achieve the separation of the measurement matrix and the reconstruction matrix, and make the reconstruction matrix close to the most excellent configuration without the any model change at the front end of the measurement system.

Key words: compressive sensing; sparsity; measurement matrix; reconstruction matrix; singular value decomposition

压缩感知(compressive sensing, CS^[1])是一种新的信号采样理论。相比经典的 Shannon-Nyquist 采

样定理,CS 方法利用自然界绝大多数的信号所具有的稀疏性,将采样和压缩过程同步完成,通过随机投

收稿日期:2015-05-15

基金项目: NSFC-广东联合基金资助项目(U1201255);国家自然科学基金资助项目(61301296;61377006;61501001);安徽省自然科学基金资助项目(1508085MF121;1608085QF161);安徽省教育厅重点项目资助(KJ2015A114);安徽大学博士科研启动经费资助项目(33190218)

作者简介:张成(1984—),男,讲师,博士。研究方向:光学成像;相位检索;信号与信号处理。E-mail:question1996@163.com

*通信联系人 E-mail:26222503@qq.com

影实现高维信号到低维空间的映射,可以在远低于 Nyquist 采样率的测量条件下精确重建原始信号。

CS 方法在应用数学、电子工程和遥感等领域引起了越来越广泛的关注。测量矩阵是 CS 方法的关键研究内容之一,其可以通过随机投影保留信号的更多信息。随机测量矩阵不仅仅是一个简单的随机变量,还应该满足约束等距性^[2] (restricted isometric property, RIP)。最经典的随机测量矩阵有高斯矩阵和伯努利矩阵^[3]、亚高斯随机投影^[4]和稀疏随机投影^[5-6]、部分傅里叶矩阵^[7-8]、部分哈达码矩阵^[9]和部分正交矩阵^[10]等。张成等提出随机间距稀疏 Toeplitz 矩阵^[11]、超稀疏循环矩阵^[12]等。鲜义川等^[13]提出混沌序列构造测量矩阵优化算法,栗娟等^[14]提出基于切比雪夫扩频序列的测量矩阵构造算法。上述各测量矩阵已理论证明其满足 RIP 条件,但缺点是测量矩阵即为重建矩阵,并未考虑重建阶段对重建矩阵的要求^[3-6],没有对重建矩阵进行进一步的优化以提高其重建性能。

彭玉楼等^[15]提出一种基于对测量矩阵奇异值分解的噪声信号重构算法。该算法首先对随机测量矩阵进行奇异值分解,通过均值算法修改对角矩阵的特征值,产生新的测量矩阵用于线性测量,理论证明了新测量矩阵比原测量矩阵具有更高的重构精度,其重构精度对 1 维信号提高了 3% ~ 5%,峰值信噪比对 2 维信号提高大约 1 ~ 2 dB。但是,文献[15]方案是提前设计测量矩阵,且该矩阵并未考虑实际感知系统中测量矩阵的实现难度的问题。

受此启发,作者提出基于奇异值分解^[16]的测量矩阵优化算法 (optimized oeamasurement matrix via singular value decomposition, OMM-SVD)。有别于文献[15]方法事先设计新的传感矩阵的问题,提出的 OMM-SVD 算法可以适用于任何线性测量系统,可以有效地实现前端测量矩阵与后端重建矩阵的分离。这样,前端测量矩阵可以侧重于如何降低测量系统物理实现的难度,在后端通过测量系统的预处理,使得新的测量系统中测量矩阵的行之间是归一化且彼此正交的,故可以兼顾前端降低硬件实现的复杂性和后端重建对测量矩阵正交性的要求。

1 压缩感知

假定一个信号 \mathbf{x} 在某个正交基或紧框架 Ψ 上的变换系数是稀疏的,即:

$$\mathbf{x} = \Psi\boldsymbol{\alpha} = \sum_{j=1}^N \Psi_j\alpha_j \quad (1)$$

式中,变换系数 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$,且 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0 = K, K \ll N$,即 $\boldsymbol{\alpha}$ 仅有 K 个非零元素, K 也被称为信号的稀疏度 (sparsity)。则线性感知系统可以定义为:

$$\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} + \mathbf{z} = \Phi\Psi\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{z} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{z} \quad (2)$$

式中, Φ 为 $M \times N (M \ll N)$ 维的测量矩阵 (measurement matrix), Ψ 为 $N \times N$ 维的稀疏基矩阵, $\mathbf{A} = \Phi\Psi$ 为感知矩阵 (sensing matrix), \mathbf{z} 为加性噪声。CS 理论研究表明,对感知矩阵 \mathbf{A} 而言,如果其满足式 (3) 所示的 K 阶约束等距性 (K -order restricted isometric property, K -RIP),即

$$(1 - \delta_K) \|\boldsymbol{\alpha}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\boldsymbol{\alpha}\|_2^2 \quad (3)$$

那么,当测量数目 M (即矩阵的行数) 满足下面的条件:

$$M \geq CK \ln(N/K) \quad (4)$$

就可以采用下面的优化方法从测量值 \mathbf{y} 中大概率地恢复信号的稀疏表示系数 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \arg \min \|\boldsymbol{\alpha}\|_0, \quad \text{s. t.} \quad \|\mathbf{y} - \Phi\Psi\boldsymbol{\alpha}\|_2 \leq \sigma \quad (5)$$

式 (1)、(2) 和 (5) 分别对应 CS 理论的 3 大基本研究内容——信号的稀疏表示模型、观测过程与非线性重建算法。

2 基于奇异值分解的测量矩阵优化

OMM-SVD 的基本思想如下:考虑式 (2) 中的信号感知系统,首先对感知矩阵 \mathbf{A} 执行奇异值分解:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (6)$$

式中: $\boldsymbol{\Sigma}$ 是大小为 $M \times N$ 的半正定对角矩阵; \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 都是正交矩阵,即

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}_M \quad (7)$$

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}_N \quad (8)$$

因此,感知系统可以修改如下:

$$\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} = \Phi\Psi\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T\boldsymbol{\alpha} =$$

$$\mathbf{U} \begin{bmatrix} \overbrace{\sigma_1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}^{M \times M} & \overbrace{0 \quad \cdots \quad 0}^{(N-M) \times M} \\ 0 & \sigma_2 \quad \cdots \quad 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \quad \cdots \quad \sigma_M & 0 \quad \cdots \quad 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \boldsymbol{\alpha} =$$

$$\mathbf{U} \begin{bmatrix} \overbrace{\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_1}^{M \times M} & \overbrace{\mathbf{O}}^{(N-M) \times M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overbrace{\widetilde{\mathbf{V}}_1}^{N \times M} & \overbrace{\widetilde{\mathbf{V}}_2}^{N \times (N-M)} \end{bmatrix}^T \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^T \boldsymbol{\alpha} \quad (9)$$

式中: $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)$ 为 $M \times M$ 维对角方阵; \mathbf{O} 为 $(N - M) \times M$ 维全 0 矩阵; 矩阵 \mathbf{V} 的子矩阵 $\mathbf{V}_1 \in \mathbb{R}^{N \times M}$ 、 $\mathbf{V}_2 \in \mathbb{R}^{N \times (N-M)}$ 为列正交矩阵,即 $\mathbf{V}_1^T \mathbf{V}_1$

$= \mathbf{I}_M, \mathbf{V}_2^T \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_{N-M}$, 其中, \mathbf{I}_M 和 \mathbf{I}_{N-M} 分别为 $M \times M$ 和 $(N - M) \times (N - M)$ 维单位矩阵。

通过对式(9) 两边左乘矩阵 $\Sigma_1^{-1} \mathbf{U}^T$, 可以得到:

$$\Sigma_1^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y} = \Sigma_1^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \Sigma_1 \mathbf{V}_1^T \boldsymbol{\alpha} = \Sigma_1^{-1} \Sigma_1 \mathbf{V}_1^T \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{V}_1^T \boldsymbol{\alpha} \quad (10)$$

最终, 可以得到新的测量系统如下:

$$\mathbf{y}_{\text{SVD}} = \Phi_{\text{SVD}} \boldsymbol{\alpha} \quad (11)$$

式中,

$$\mathbf{y}_{\text{SVD}} = \Sigma_1^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y} \quad (12)$$

$$\Phi_{\text{SVD}} = \mathbf{V}_1^T \quad (13)$$

值得指出的是, 此时的测量矩阵 Φ_{SVD} 是行正交矩阵, 即 $\Phi_{\text{SVD}} \Phi_{\text{SVD}}^T = \mathbf{I}_M$ 。换句话说, 该矩阵可看成是从 $N \times N$ 维正交矩阵中随机抽取 M 行得到的广义正交矩阵 (general orthogonal measurement

ensembles), 经 Candès 证明其满足 RIP 条件^[7-8,10]。

3 数值实验

在 CS 理论中, 最常用的测量矩阵是随机高斯矩阵和伯努利矩阵, 这两类矩阵具有非常好的随机性质, 可以理论证明其高概率地满足 RIP 条件。因此, 以二者为代表, 研究 OMM-SVD 算法对这两种不同的测量矩阵的重建性能的优化与提高。

第 1 组实验是单次重建实验, 用于比较采用 OMM-SVD 算法对重建过程与重建结果的影响。重建算法选用经典的正交匹配追踪 (orthogonal matching pursuit, OMP^[10]) 算法, 它由 Tropp 等提出, 具有实现成本低、信号重建速度快、恢复的精度高等优点。测量矩阵仅选用随机高斯矩阵, 具体结果如图 1 所示。

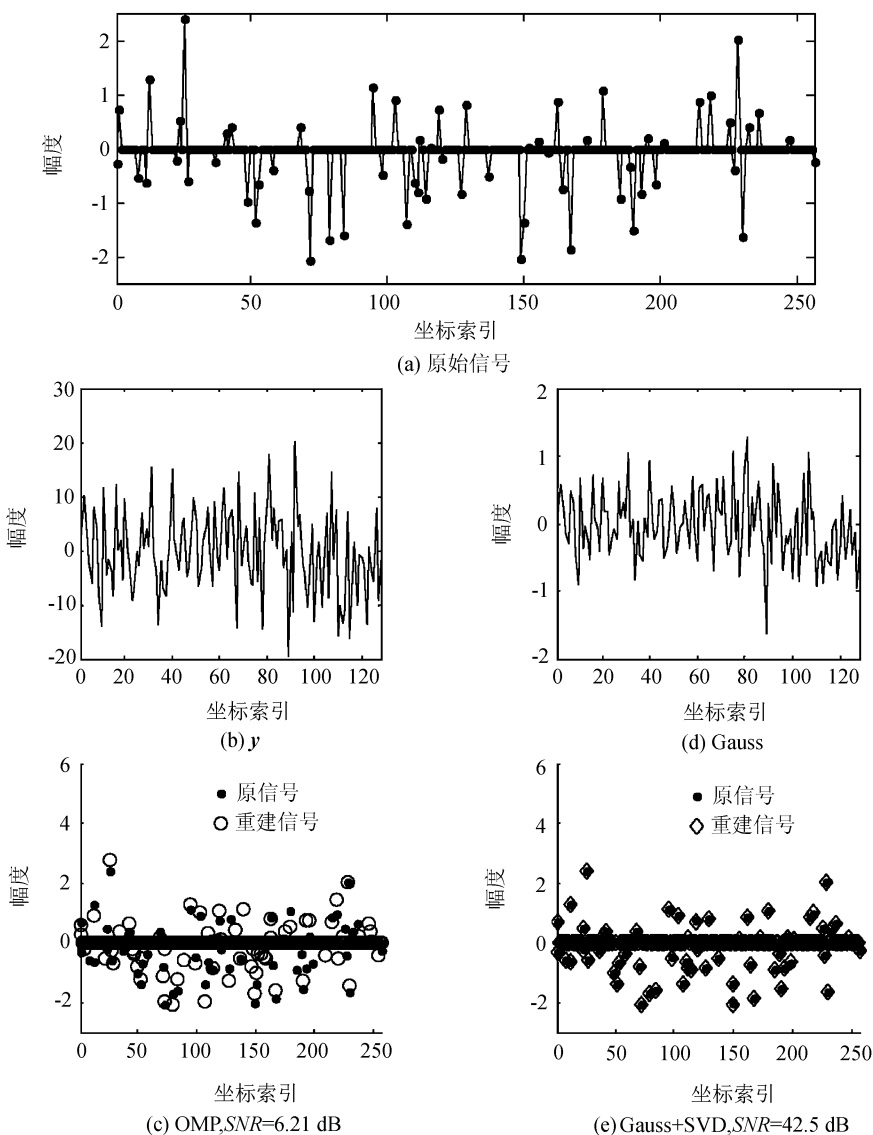


图 1 单次重建实验

Fig. 1 Single reconstruction experiment

图1中,图1(a)为原始的稀疏信号,其长度 $N = 256$,稀疏基选用标准正交基(此时感知矩阵和测量矩阵等同,后文为表述方便,统一采用测量矩阵),信号稀疏度 $K = 64$,即待测试信号是自稀疏的,有64个非零元素,其元素值的大小服从标准正态分布。测量数目 $M = 128$,恰好是信号稀疏度的2倍,对于OMP算法来说,这是一个相对较难成功重建的条件,因为OMP算法保证高精度重建的经验表明,测量数目一般应为稀疏度的3~5倍。测量矩阵的大小是 128×256 ,其元素服从标准正态分布,这是最常用的测量矩阵。采用该矩阵得到的测量向量 \mathbf{y} 如图1(b)所示。从图1(b)的测量向量 \mathbf{y} 出发,采用经典的OMP算法,得到的原信号的估计值如图1(c)所示。

另一方面,对测量矩阵与测量向量采用OMM-SVD算法进行优化处理,得到新的测量值 \mathbf{y}_{SVD} 如图1(d)所示。与此同时,对 Φ_{SVD} 进行了相应的优化。采用优化后的重建矩阵 Φ_{SVD} 和测量向量 \mathbf{y}_{SVD} ,再使用OMP算法重建,得到的重建结果如图1(e)所示。

比较图1(c)和1(e)中的重建结果,可以发现未经优化的观测系统的大部分重建值和原信号有所偏差,而采用SVD方法优化以后信号的估计值和真实值基本完全吻合。通过客观度量——信噪比(signal-to-noise ratio, SNR)的差别来评价,未优化的重建信号的信噪比仅有6.21 dB,而采用OMM-SVD算法优化后的重建信噪比达到了42.5 dB,得到了极大提高。

当然,由于稀疏信号以及测量矩阵都是随机生成的,具有很大的随机性。为更公平地比较采用SVD优化观测系统前后的性能变化,设计了第2组实验,通过多次独立的实验在统计意义上验证采用SVD优化后性能的改变。

第2组实验所采用的参数设置为:信号稀疏度 $N = 256$;测量值 M 固定为128;不断改变稀疏度 K 的值,使 K 值的大小从35变化到85,变化步长设置为5。在每组参数 (N, M, K) 设置下,独立随机地生成稀疏信号和测量矩阵。一种方式是直接采用OMP算法重建,另一种方式是先采用OMM-SVD算法对同一组稀疏信号和测量矩阵进行优化,再采用OMP算法进行重建。分别计算原信号与估计信号之间的均方差(mean square error, MSE)和SNR值。在每组 (N, M, S) 参数下,实验独立地执行1000次,统计1000次实验的重建结果。其中:1000次重建实验的MSE用于绘制重建误差曲线,如图2(a)所示。每一

次重建的SNR值若大于25 dB,则认为原信号成功重建,否则,失败。统计1000次重建实验的成功重建概率,其结果如图2(b)所示。

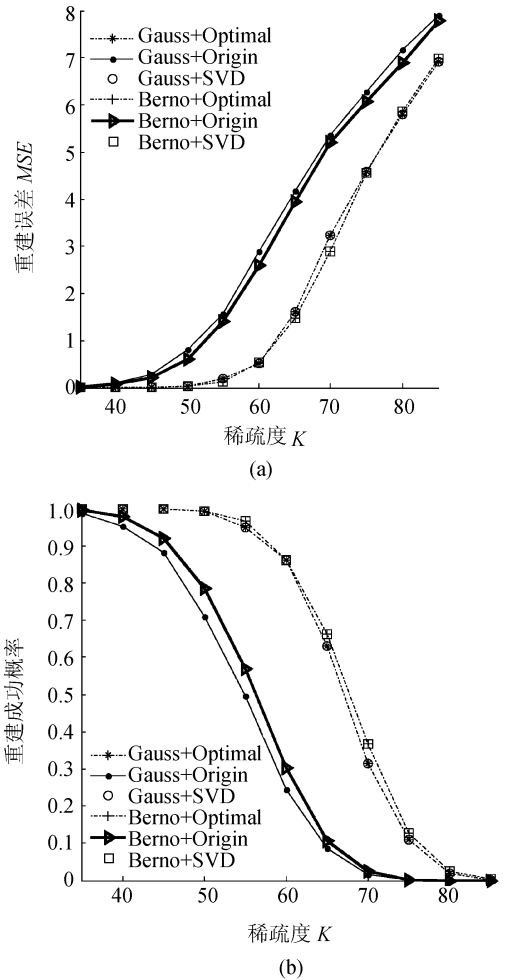
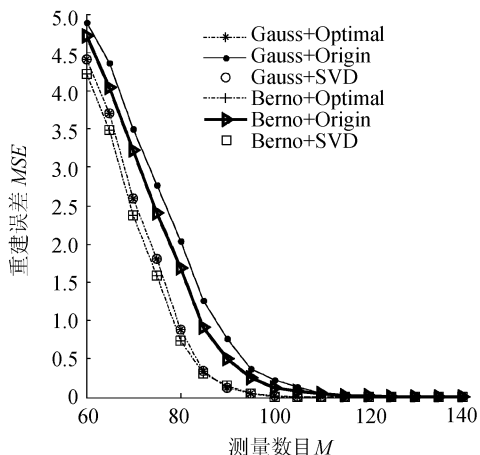


图2 重建误差、重建成功概率随稀疏度变化曲线

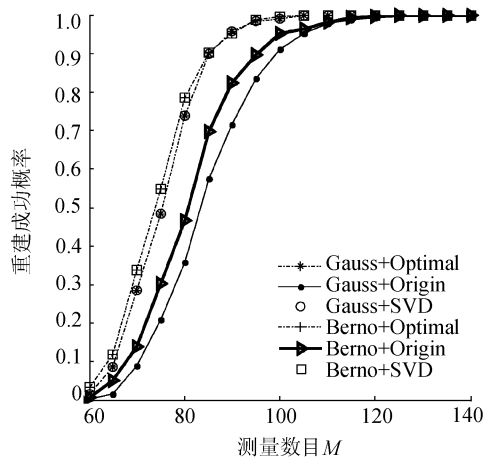
Fig. 2 Probability of MSE and successful recovery vs. sparsity

第3组实验与第2组非常类似,测试的是重建性能对比随测量数目变化的曲线。信号的维数是 256×1 。固定稀疏度 K 为30,测量数目 $M = 60; 5; 140$ 。采取和第2组实验相同的处理方式,在每组 (N, M, K) 设置下随机生成稀疏信号和测量矩阵,然后分为2种方式即直接重建以及先经过OMM-SVD算法优化后再重建。重建后分别计算两种重建方法的估计信号与真实信号之间的MSE和SNR值。在每组 (N, M, S) 参数下实验同样独立测试1000次,统计1000次重建结果。1000次重复实验绘制的MSE曲线如图3(a)所示。则通过判断SNR值是否大于25 dB来确定是否重建成功,并计算成功重建的概率,其结果如图3(b)所示。

在图2和3中,分别对随机高斯矩阵(图中简称



(a)



(b)

图 3 重建误差、重建成功概率随测量数目变化曲线

Fig. 3 Probability of MSE and successful recovery vs. number of measurements

Gauss) 和伯努利矩阵 (图中简称 Berno) 进行了测试,为进行对比,同时还测试了最优 (Optimal) 矩阵。以随机高斯矩阵为例,其最优矩阵是先对测量矩阵的行执行正交归一化处理,再进行式 (2) 中的信号观测,最后通过 OMP 算法重建得到。矩阵的行之间归一化且彼此正交的,从而可以保证信号的整体信息被均匀地扩散到整个测量域,实现信息的最大化测量。随机高斯矩阵经过上述在感知前完成预处理的步骤成为其最优矩阵 (Gauss + Optimal),与此类似,伯努利矩阵经过同样的处理后的矩阵命名为 (Berno + Optimal),以作为性能比较的参照对象。从图 2 ~ 3 中的曲线可以看出,无论是性能指标 MSE,还是重建成功概率,原始伯努利测量矩阵 (Berno + Origin) 的重建性能略优于原始的随机高斯矩阵 (Gauss + Origin),经过 OMM-SVD 算法优化后的测量矩阵 Gauss + SVD、Berno + SVD 的性能得到了显著的改善,已基本与各自的最优矩阵性能保持

了高度的一致。

最优矩阵和经过 OMM-SVD 算法处理后的优化矩阵之间存在一个最大的不同之处——对观测系统要求的差异。最优矩阵要求事先完成测量矩阵的行之间的正交归一化,这就要求对感知系统进行改变,将导致感知系统的实际物理实现难度与成本大大增加,甚至在实际应用中是不可能实现的。

而本文提出的 OMM-SVD 算法不需要对前端的感知系统做任何改变,只需在后端直接对感知系统的测量矩阵与测量向量进行优化即可,避免了额外增加感知系统的物理实现成本,成功实现了对应于前端感知系统的测量矩阵与后端应用于算法的重建矩阵之间的分离,在前端的信号感知部分可以专注于设计易于物理实现且成本低的压缩感知系统,后端通过 OMM-SVD 算法优化处理使重建性能得到优化。

第 4 组实验的目的是为了测试本文方法的鲁棒性。固定信号的维数 $N = 256$,信号稀疏度 $K = 30$,测量数目 $M = 120$ 。输入信噪比为 20 dB:1 dB:40 dB。随机生成稀疏信号和测量矩阵,按照式 (2) 计算测量向量 y 。对同一个测量向量 y 分别加入不同 SNR 值的噪声,噪声的加入采用 Matlab 软件自带的 awgn 函数来实现。从含有噪声的测量向量出发,分为 2 种方式即直接采用 OMP 算法以及先 OMM-SVD 算法优化再 OMP 算法重建。计算重建的信号与真实信号之间的 SNR 值,大于 25 dB 则成功重建。统计 1 000 次独立测试的成功重建概率,其结果如图 4 所示。

由图 4 可知,OMM-SVD 算法可以明显提高系统重建的鲁棒性。

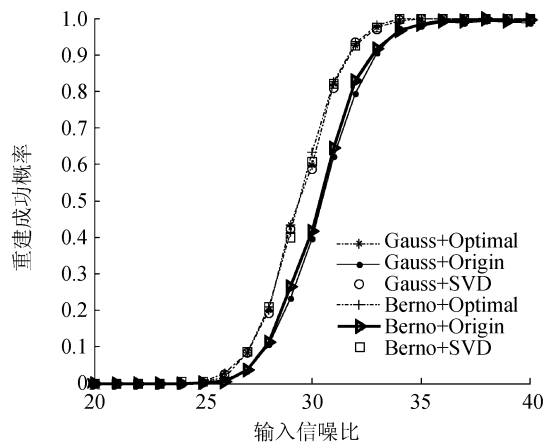


图 4 重建成功概率随输入信噪比变化曲线

Fig. 4 Probability of successful recovery vs. different noises with varied input SNR

4 结 论

提出一种基于奇异值分解的测量矩阵优化算法,该方法可以实现信号感知系统对应的测量矩阵与符合后端重建算法要求的重建矩阵的分离。既可以在前端信号感知系统设计时降低物理实现的难度与成本,又可在后端优化感知系统对应的测量矩阵和测量值,使得后端的重建算法可以获得更优的重建性能。数值实验结果表明,该 OMM-SVD 算法可以显著提高成功重建的概率。此外,鲁棒性测试结果表明,在噪声干扰条件下成功重建概率也有较明显改善。

该 OMM-SVD 方法适用于一般的线性测量系统,下一步研究准备和实际物理约束相结合,实现物理可实现的系统前端对应的测量矩阵与后端的重建矩阵的分离,提高重建质量。

参考文献:

- [1] Baraniuk R. Compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118 - 121.
- [2] Baraniuk R, Davenport M, DeVore R, et al. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices[J]. Constructive Approximation, 2008, 28(3): 253 - 263.
- [3] Tsai Y, Donoho D L. Extensions of compressed sensing[J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 549 - 571.
- [4] Fang Hong, Zhang Quanbing, Wei Sui. A method of image reconstruction based on sub-Gaussian random projection[J]. Journal of Computer Research and Development, 2008, 45(8): 1402 - 1407. [方红, 章权兵, 韦穗. 基于亚高斯随机投影的图像重建方法. 计算机研究与发展, 2008, 45(8): 1402 - 1407.]
- [5] Fang Hong, Zhang Quanbing, Wei S. Method of image reconstruction based on very sparse random projection[J]. Computer Engineering and Applications, 2007, 42(22): 25 - 27. [方红, 章权兵, 韦穗. 基于非常稀疏随机投影的图像重建方法[J]. 计算机工程与应用, 2007, 42(22): 25 - 27.]
- [6] Parvaresh F, Vikalo H, Misra S, et al. Recovering sparse signals using sparse measurement matrices in compressed DNA microarrays[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2008, 2(3): 275 - 285.
- [7] Candès E J, Tao T. Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(12): 5406 - 5425.
- [8] Candès E J, Romberg J, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(8): 1207 - 1223.
- [9] Pinkus A. *N*-widths in approximation theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [10] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655 - 4666.
- [11] Zhang Cheng, Yang Hairong, Wei Sui. Compressive sensing based on deterministic sparse toeplitz measurement matrices with random pitch[J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(7): 1362 - 1369. [张成, 杨海蓉, 韦穗. 基于随机间距稀疏 Toeplitz 测量矩阵的压缩传感[J]. 自动化学报, 2012, 38(7): 1362 - 1369.]
- [12] Zhang Cheng, Zhang Quanbing, Zhang Fen, et al. Super-sparse tri-value circulant measurement matrices design[J]. Journal of University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2014, 42(10): 37 - 41. [张成, 章权兵, 张芬, 等. 超稀疏三元循环测量矩阵的设计[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2014, 42(10): 37 - 41.]
- [13] Xian Yichuan, Li Jian, Li Zhi. Optimization algorithm based on chaotic sequence structured measurement matrix. Journal of Sichuan University: Engineering Science Edition, 2014, 46(增刊2): 128 - 132. [鲜义川, 李健, 李智. 基于混沌序列构造测量矩阵优化算法[J]. 四川大学学报: 工程科学版, 2014, 46(增刊2): 128 - 132.]
- [14] Su Juan, Li Zhi, Li Jian. Measurement matrix construction algorithm based on Chebyshev spreading sequence[J]. Journal of Sichuan University: Engineering Science Edition, 2015, 47(Suppl 2): 155 - 160. [粟娟, 李智, 李健. 基于切比雪夫扩频序列的测量矩阵构造算法[J]. 四川大学学报: 工程科学版, 2015, 47(增刊2): 155 - 160.]
- [15] Peng Yulou, He Yigang, Lin Bin. Noise signal recovery algorithm based on singular value decomposition in compressed sensing[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2013, 33(12): 2655 - 2660. [彭玉楼, 何怡刚, 林斌. 基于奇异值分解的可压缩传感噪声信号重构算法[J]. 仪器仪表学报, 2013, 33(12): 2655 - 2660.]
- [16] Golub G H, Van Loan C F. Matrix computations[M]. Baltimore: JHU Press, 2012. (编辑 赵 婧)