

文章编号:1009-3087(2013)02-0013-05

## 推移质颗粒3维运动紊动特性试验研究

唐立模<sup>1,2</sup>,何 晔<sup>2</sup>,唐洪武<sup>1,2</sup>,王兴奎<sup>3</sup>

(1. 河海大学 水文水资源及水利工程科学国家重点实验室,江苏 南京 210098;

2. 河海大学 水利水电学院,江苏 南京 210098;3. 清华大学 水沙科学与水利水电工程国家重点实验室,北京 100084)

**摘 要:**采用3维粒子示踪测速技术,观测了10种不同示踪粒子的粒径、比重以及水力比降等水沙条件下推移质颗粒的3维运动,并对其紊动特性进行了统计分析。分别探讨了粒径、比重及水力比降对推移质颗粒紊动强度的影响,定性总结了3个方向上紊动特性的变化规律。实验结果表明,推移质颗粒的纵向紊动强度随粒径减小和水力比降的增大而加大,垂向和横向紊动强度在近壁区的变化规律与纵向相反,颗粒比重对紊动强度的影响不明显。

**关键词:**粒径;比重;水力比降;紊动强度

中图分类号:TV142.2

文献标志码:A

### Experimental Study on the 3D Motion Turbulence Characteristics of Bed-load Particles

TANG Li-mo<sup>1,2</sup>, HE Ye<sup>2</sup>, TANG Hong-wu<sup>1,2</sup>, WANG Xing-kui<sup>3</sup>

(1. State Key Lab. of Hydrology-water Resources and Hydraulic Eng. ,Hohai Univ. ,Nanjing 210098, China;

2. College of Water Conservancy and Hydropower Eng. ,Hohai Univ. ,Nanjing 210098, China;

3. State Key Lab. of Hydrosience and Eng. ,Tsinghua Univ. ,Beijing 100084, China)

**Abstract:** In steady uniform flows with different particle diameter, specific gravity and flow slope, ten runs of experiments with bed-load particles were performed using a three dimensional particle tracking velocimetry (3D PTV) technique, and then the turbulence velocity characteristics of bed-load particles were analyzed statistically. The experimental results showed that the longitudinal turbulence intensity of bed-load particles increases with the decrease of diameter and the increase in slope. In the near wall region, the vertical and transverse turbulence intensities showed the reverse law with the longitudinal. The specific gravity has inconspicuous effect on the turbulence intensities.

**Key words:** particle diameter; specific gravity; flow slope; turbulence intensity

水流中的泥沙颗粒受力非常复杂,一方面,固、液两相之间存在密切的相互作用,其相互影响程度又和水流参数、颗粒特性(主要包括粒径、形状、密度等)以及浓度、温度等诸多因素有关;另一方面,含沙水流的边界条件是不断变动的,颗粒会碰撞、冲击床面,或在床面滚动,同一泥沙颗粒,在不同的时候可能静止于床面,可能紧贴床面以推移的形式运

动,也可能被大尺度涡旋卷入主流以悬移的形式运动,颗粒和床面以及水流间的作用是持续变化的,因此影响颗粒运动的因素和机理至今仍未研究清楚。对于推移质颗粒,由于其运动时与边壁之间存在着频繁的相互作用,颗粒的运动规律尤为复杂。Rizk和Elghobashi<sup>[1]</sup>分析了边壁对颗粒脉动强度的影响,发现边壁的存在加大了颗粒的脉动强度,而且随着颗粒粒径和容重的增大,边壁的影响也加大,边壁对颗粒垂向脉动的影响更加显著。刘大有等<sup>[2]</sup>将近壁颗粒的脉动划分为2种形式,即除了跟随水流的湍流脉动外,还存在颗粒跃移、与壁面碰撞等方式引起的非湍流脉动,由于床面附近湍流脉动往往比较小,颗粒的非湍流脉动通常可达到与前者同量级甚至大于前者,从而导致推移质颗粒的脉动往往大于水流的脉动。Nezu和Azuma<sup>[3]</sup>的试验表明,在近

收稿日期:2012-11-28

基金项目:国家自然科学基金青年科学基金资助项目(50909036; 51109066);国家杰出青年科学基金项目(51125034);河海大学水文水资源及水利工程科学国家重点实验室基本科研业务费自主研究项目(2011585712)

作者简介:唐立模(1977—),男,副教授,博士。研究方向:泥沙运动力学和现代流体测速技术。E-mail: tanglimo@hhu.edu.cn

壁区颗粒的脉动强度大于水流,在垂向上的差别更为明显。Muste 等<sup>[4-5]</sup>对粗颗粒泥沙的观测也表明,近壁区流体的垂向脉动强度要小于颗粒脉动。Hu 等<sup>[6-7]</sup>通过大量的试验分析,认为跃移是推移质泥沙颗粒运动的重要形式,并统计研究了颗粒跃移的运动学和动力学特征参数。Lee 等<sup>[8-9]</sup>对颗粒跃移运动开展了一系列研究,并建立了单步跳跃、连续跳跃等模型对颗粒跃移轨迹和速度进行描述。白玉川等<sup>[10]</sup>也建立了泥沙跃移模型,对跃移质的运动参数和推移质输沙规律进行了统计研究。但以往的研究绝大多数都只涉及了推移质泥沙的 2 维运动特性,对 3 维运动规律的探讨还比较少见。

作者利用所建立的 3 维粒子图像示踪测速(3D PTV)系统<sup>[11]</sup>,在变坡水槽中对 10 种不同水沙条件下推移质颗粒的运动进行了观测和比较,统计分析了推移质运动紊动强度随水沙条件的变化情况,并分别探讨了颗粒粒径、比重和水力比降对紊动特性的影响。

## 1 试验系统及参数定义

试验在长 20 m、宽 29.5 cm 可变坡玻璃循环水槽中进行,在水槽中部架设自主开发的 3D PTV 系统对推移质泥沙颗粒运动轨迹进行记录,获得单颗粒的瞬时速度序列,并以此计算泥沙运动的紊动参数。系统结构、原理及观测方法详见文献[11],测速精度为 0.1 cm/s。

试验选用了 3 种不同比重的试验沙,在光滑床面恒定均匀流的条件下,保持各组试验水深  $h = 5.40$  cm 不变,分别按照不同比重、不同粒径和不同水力比降 3 个变化系列,共进行了 10 组试验。所有沙样的比重  $\gamma_s$  和静水沉速  $\omega$  都由试验实际测量给出,结果见表 1。其中,  $D$ 、 $\gamma_s$  分别为颗粒的粒径、容重,  $J$  为坡降,  $u_* = \sqrt{gRJ}$  为摩阻流速,  $R$  为湿周,  $\omega$  为实测的颗粒静水沉速,颗粒雷诺数  $Re_* = \frac{u_* D}{\nu}$ 。

在分析泥沙运动规律时,根据 Einstein 的研究,推移层的厚度定义为 2 倍粒径。在推移层  $2D$  厚度内将实测资料分成 6 个流区,各流区的位置见表 2。

分析实测资料时,首先计算颗粒轨迹的平均高度以判定其所处的流区,求出每个流区中全部颗粒的平均高度和速度,作为该区的代表高度和速度;依次计算各流区的颗粒,得出每组试验推移质颗粒在推移层内 3 个方向的速度沿垂线的分布。

表 1 水流参数及沙样特性

Tab. 1 Parameters of flow and sands

实验组次	$D/\text{mm}$	$\gamma_s/(\text{t} \cdot \text{m}^{-3})$	$J/\%$	$u_*/(\text{cm} \cdot \text{s}^{-1})$	$\omega/(\text{cm} \cdot \text{s}^{-1})$	$Re_*$	组次代号
1	1.9	1.40	0.10	1.97	7.67	37.4	R140D19J10
2	1.9	1.54	0.02	0.88	8.20	16.7	R154D19J02
3	1.9	1.54	0.06	1.52	8.20	28.9	R154D19J06
4	0.9	1.54	0.10	1.97	4.92	17.7	R154D09J10
5	1.3	1.54	0.10	1.97	6.38	25.6	R154D13J10
6	1.9	1.54	0.10	1.97	8.20	37.4	R154D19J10
7	1.9	1.54	0.20	2.78	8.20	52.8	R154D19J20
8	1.9	1.54	0.30	3.41	8.20	64.8	R154D19J30
9	2.5	1.54	0.10	1.97	10.2	49.3	R154D25J10
10	1.9	2.62	0.10	1.97	17.3	37.4	R262D19J10

表 2 颗粒速度分析分区位置

Tab. 2 Sub region of bed-load layer

流区号	1	2	3	4	5	6
$y/D$	0.5~0.75	0.75~0.85	0.85~1.0	1.0~1.2	1.2~1.5	1.5~2.0

注:  $y$  为泥沙颗粒距床面高度。

在纵向上,单颗粒运动速度的紊动强度  $u_p'$  定义为:

$$u_p' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_p} (U_i - U_p)^2}{N_p}} \quad (1)$$

式中,  $U_i$  为该颗粒实测瞬时速度,  $U_p = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} U_i$  为该颗粒的平均速度,  $N_p$  则为此颗粒所有速度序列总数。

流区内颗粒的紊动强度取该区内全部  $N_b$  个颗粒的紊动强度的平均值:

$$u_b' = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} u_p' \quad (2)$$

垂向和横向的紊动强度采用相同定义。

## 2 颗粒纵向紊动特性

图 1 为所有 10 组试验的颗粒纵向紊动强度分布。由图 1 可见,除颗粒比重最大的 Run. 10 组外,各组试验的颗粒在最靠近床面流区的脉动强度较小,原因是处于该流区的颗粒多以滚动、滑动形式运动,未能完全脱离固壁床面;大多数组次颗粒运动随着远离床面,脉动强度逐渐增加,并在距床面  $0.75D \sim 1.25D$  处出现一个极大值,之后脉动强度逐渐减小;其中颗粒粒径最小的 Run. 4、Run. 5 组实测脉动

强度随  $y$  值增大而持续增大。

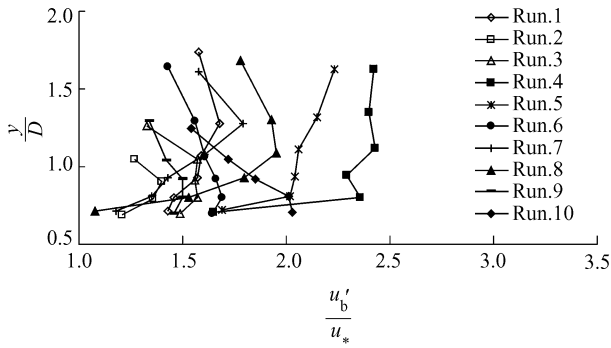


图1 颗粒纵向紊动强度分布

Fig.1 Distribution of longitudinal turbulence intensity of particles

图2为相同水流条件下不同粒径的颗粒纵向速度的紊动强度分布。实测资料表明,颗粒的纵向紊动强度随粒径的减小而加大,粒径较小组次试验( $D = 0.9, 1.3 \text{ mm}$ )在位于1.5倍粒径高度处的推移层颗粒的紊动强度与清水紊动强度的差值较小,粒径较大组次试验的颗粒脉动强度则明显小于水流脉动强度,随着粒径增大,水流与颗粒脉动强度的差值增大。

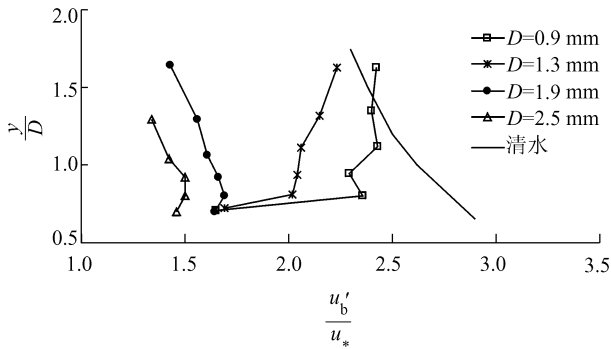


图2 不同粒径的颗粒纵向紊动强度分布

Fig.2 Distribution of longitudinal turbulence intensity of particles with different diameters

图3为其它条件相同,仅水力比降变化时颗粒纵向脉动强度的对比。总体来看,随着水力比降的增加,颗粒的纵向紊动强度加大。由于试验所选用的推移质颗粒较粗( $D = 1.9 \text{ mm}$ ),颗粒的纵向紊动强度明显小于清水的紊动强度。

图4为不同比重的试验结果。由于比重试验的组次较少,其影响规律不明显。但仍可以看出,比重最大1组试验的颗粒脉动变化规律不同于其它2组。从图4还可以得知,在推移层的下部流区,颗粒的紊动强度随比重而增加,上部流区则随比重的加大而减少,这主要是由于空间尺度的限制和颗粒惯性作用的影响。

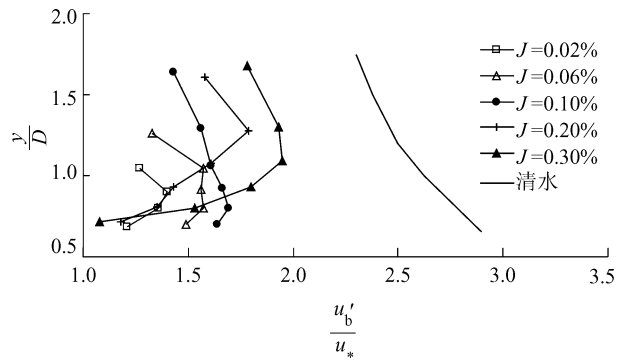


图3 不同坡降下颗粒纵向速度的紊动强度分布

Fig.3 Distribution of longitudinal turbulence intensity under different slopes

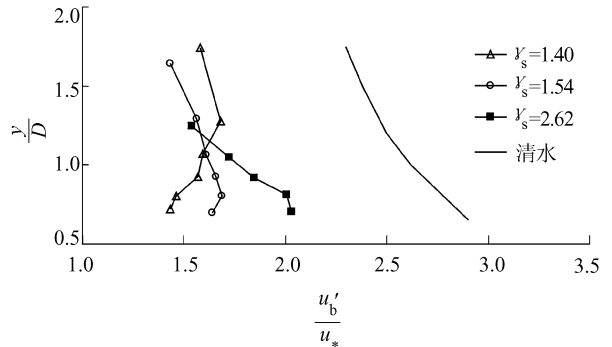


图4 不同比重的颗粒纵向速度的紊动强度分布

Fig.4 Distribution of longitudinal turbulence intensity of particles with different densities

### 3 颗粒垂向紊动特性

所有10组试验的颗粒垂向紊动强度沿垂线的分布见图5,其数值大约为清水试验结果的一半。

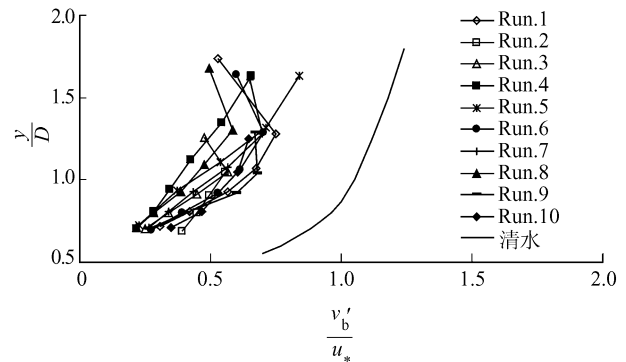


图5 颗粒垂向速度紊动强度分布

Fig.5 Distribution of vertical turbulence intensity of particles

不同粒径颗粒垂向紊动强度的分布见图6。在推移层的下部流区,垂向紊动强度随粒径加大而增加。与颗粒纵向紊动强度相比,其与粒径的变化关系相反,说明细颗粒在垂向上的脉动较小,但在纵向上

的脉动较大。对同一组试验的相同高度,颗粒紊动强度与水流紊动强度的差值随粒径的加大而增加。

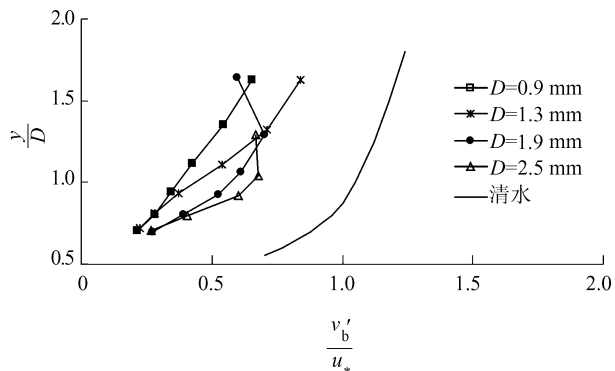


图6 不同粒径的颗粒垂向速度的紊动强度分布

Fig. 6 Distribution of vertical turbulence intensity of particles with different diameters

清水试验结果表明,离床面越近,水流纵向紊动强度越大而垂向紊动强度越小;由于细颗粒的推移层厚度更靠近边壁,因此,在清水紊动的作用下,近壁流区运动的细颗粒的纵向紊动强度加大而垂向紊动强度减少。

图7为不同坡降的垂向紊动强度的变化。由于各组次实测  $v'_b$  值采用  $u_*$  做了无量纲化,图7中,  $J > 0.10\%$  各组试验显示的垂线紊动强度随坡降的加大而减小,但颗粒垂向紊动强度的绝对值仍是随坡降加大而增加的。

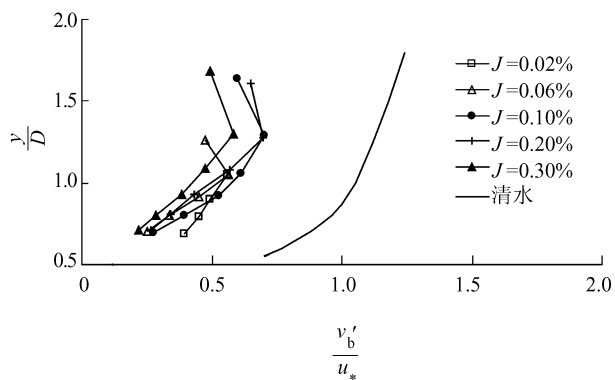


图7 不同坡降下颗粒垂向速度的紊动强度分布

Fig. 7 Distribution of vertical turbulence intensity under different slopes

图8为不同比重的颗粒垂向紊动强度的垂线分布,在试验范围内比重对颗粒垂向紊动强度的影响很小,在数值上大约也是清水紊动强度的1/2。

#### 4 颗粒横向紊动特性

图9为颗粒横向紊动强度分布随粒径的变化,在下部流区,颗粒紊动强度随粒径的加大而加大,与

垂向的颗粒紊动强度的变化趋势一致。在推移层上部流区,颗粒横向紊动强度随粒径的增加而减小。

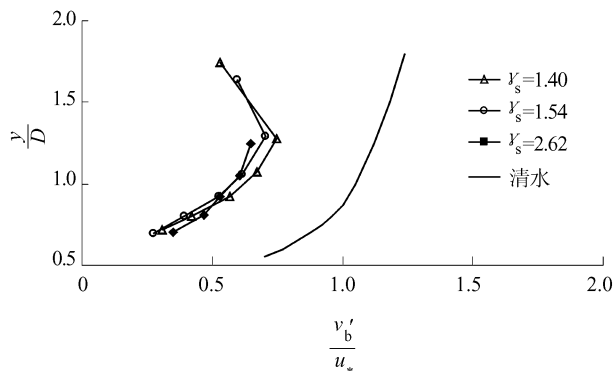


图8 不同比重的颗粒垂向速度的紊动强度分布

Fig. 8 Distribution of vertical turbulence intensity of particles with different densities

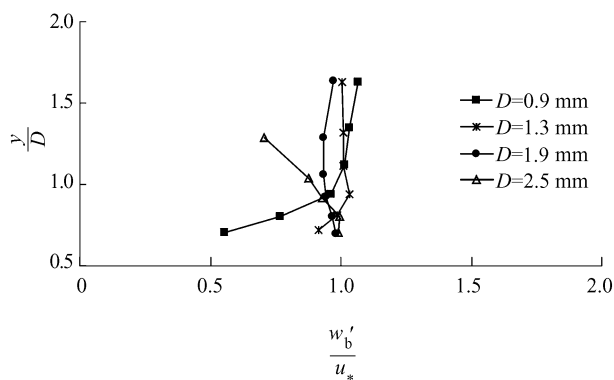


图9 不同粒径的颗粒横向紊动强度分布

Fig. 9 Distribution of transverse turbulence intensity of particles with different diameters

颗粒横向紊动强度随水力坡降的变化见图10。当  $J > 0.06\%$  时,横向紊动强度随坡降的加大而减小,这一规律与垂向紊动强度的变化趋势一致。

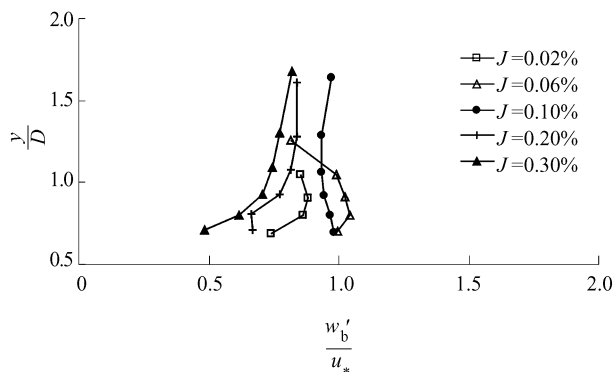


图10 不同坡降下颗粒横向紊动强度分布

Fig. 10 Distribution of transverse turbulence intensity under different slopes

图11为颗粒横向紊动强度随比重的变化,在试验范围内比重对颗粒横向紊动强度的影响没有明显规律。

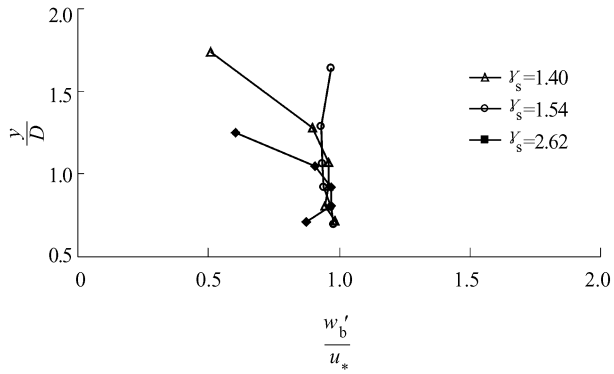


图 11 不同比重的颗粒横向紊动强度分布

Fig. 11 Distribution of transverse turbulence intensity of particles with different densities

## 5 结 论

在不同颗粒粒径、比重和水力比降条件下,分别研究了推移质颗粒运动在3个方向上紊动强度的变化规律:

1) 颗粒纵向紊动强度的变化规律:随粒径的减小而加大,随坡降的增加而加大,但比清水的紊动强度明显偏小;在推移层的下部流区,随比重加大而增加,上部流区则随比重的加大而减少。

2) 颗粒垂向紊动强度的变化规律:颗粒垂向紊动强度大约为清水试验结果的一半;在推移层的下部流区,随粒径加大而增加;受清水紊动的作用,在近壁流区运动的细颗粒的垂向紊动强度减少;当  $J > 0.10\%$  时,垂线紊动强度随坡降的加大而减小。

3) 颗粒横向紊动强度的变化规律:下部流区随粒径的加大而加大,上部流区则随粒径的增加而减小;当  $J > 0.06\%$  时,横向紊动强度随坡降的加大而减小;比重的影响不明显。

### 参考文献:

- [1] Rizk M A, Elghobashi S E. The motion of a spherical particle suspended in a turbulent flow near a plane wall[J]. *Physics of Fluids*, 1984, 28(3): 806 - 817.
- [2] Liu Dayou, Wang Guangqian, Li Hongzhou. Force analyses of sediment transport — A discussion on the collision force[J]. *Journal of Sediment Research*, 1993(2): 41 - 47. [刘大有, 王光谦, 李洪州. 泥沙运动的受力分析—关于碰撞力的讨论[J]. *泥沙研究*, 1993(2): 41 - 47.]

- [3] Nezu I, Azuma R. Turbulence characteristics and interaction between particles and fluid in particle-laden open channel flows [J]. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 2004, 130(10): 988 - 1001.
- [4] Muste M, Patel V C. Velocity profiles for particles and liquid in open-channel flow with suspended sediment [J]. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 1997, 123(9): 742 - 751.
- [5] Muste M, Yu K, Fujita I, et al. Two-phase versus mixed-flow perspective on suspended sediment transport in turbulent channel flows [J]. *Water Resources Research*, 2005, 41(10): W10402.
- [6] Hu Chunhong, Hui Yujia. Bed load transport I: Mechanical characteristics [J]. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 1996, 122(5): 245 - 254.
- [7] Hu Chunhong, Hui Yujia. Bed load transport II: Stochastic characteristics [J]. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 1996, 122(5): 255 - 261.
- [8] Lee Hongyuan, Chen Yensu, You Jiingyun, et al. Investigations of continuous bed load saltating process [J]. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 2000, 126(9): 691 - 700.
- [9] Lee Hongyuan, You Jiingyun, Lin Yingtien. Continuous saltating process of multiple sediment particles [J]. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 2002, 128(4): 443 - 450.
- [10] Bai Yuchuan, Chen Youhua, Han Qiwei. Bed load saltation movement mechanism [J]. *Journal of Tianjin University*, 2012, 45(3): 196 - 201. [白玉川, 陈有华, 韩其为. 泥沙颗粒跃移运动机理 [J]. *天津大学学报*, 2012, 45(3): 196 - 201.]
- [11] Tang Limo, Yu Mingzhong, Liu Chunjing, et al. The development and elementary application of 3-D particle tracking velocimetry [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2006, 37(11): 1378 - 1383. [唐立模, 禹明忠, 刘春晶, 等. 三维粒子示踪测速技术的开发及初步应用 [J]. *水利学报*, 2006, 37(11): 1378 - 1383.]

(编辑 张琼)

文章编号:1009-3087(2013)02-0018-04

## 推移质运动的随机理论与应用

马宏博<sup>1,2</sup>, METTRA Francois<sup>2</sup>, HEYMAN Joris<sup>2</sup>, ANCEY Christophe<sup>2</sup>, 傅旭东<sup>1\*</sup>

(1. 清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084; 2. 洛桑联邦高等工业学院(EPFL)环境水力学实验室, 瑞士 洛桑 1015)

**摘要:**陡坡急流条件下的推移质运动常伴有较大幅度的随机变化,这种随机涨落现象在各个时间尺度下普遍存在。由于这种涨落现象的存在,随机理论模型往往更适用于描述这一类问题。为进一步研究推移质运动的随机属性,作者利用包含群体输移机制的 Markov 随机模型,通过理论和实验方法研究输沙停时的概率密度分布函数(PDF),这些研究揭示出推移质运动中的尺度分离现象。在前人工作的基础上,给出输沙停时 PDF 理论解的另外一种推导方式。与较早的研究相比,该推导更为简洁、直接。该理论解已通过数值和室内实验数据得到了验证。

**关键词:**推移质运动;概率密度函数;群体输移;Markov 过程;随机理论

中图分类号:TV142

文献标志码:A

### Stochastic Model of Bed-load Transport in Mountain Rivers: Theory and Applications

MA Hong-bo<sup>1,2</sup>, METTRA Francois<sup>2</sup>, HEYMAN Joris<sup>2</sup>, ANCEY Christophe<sup>2</sup>, FU Xu-dong<sup>1\*</sup>

(1. State Key Lab. of Hydroscience and Eng., Tsinghua Univ., Beijing 100084, China;

2. Lab. of Environmental Hydraulics, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne 1015, Switzerland)

**Abstract:** Bed-load transport process over steep slope is of large fluctuations. This kind of fluctuation widely exists over different time scales. Due to this random behavior, the stochastic model can make a better performance on the description of bed-load transport process than the deterministic one. Based on the result of the early study, an alternative method to derive the theoretical solution was provided. Compared to the early derivation, by using this method the theoretical solution can be straightforwardly obtained from master equation. This solution was tested well against the numerical simulation and experimental data.

**Key words:** sediment transport; probability density function; collective entrainment; Markov processes; stochastic models

山区河流中的推移质运动常伴有较大的随机性和变异性。如相同水流条件下,山区实地测量的推移质输沙率可能覆盖4个量级。而确定性输沙模型难以描述这一类随机现象,只得依赖于随机概率模型。Ancey等<sup>[1-3]</sup>通过理想实验和随机理论建模的方式,对山区河流推移质输沙率较低的情况作了描述。他提出的随机 Markov 模型,较好地描述了低输沙率条件下,输沙浓度产生的强变异性。相对于 Einstein 的随机模型,Ancey 的模型中其中补充了一个重要的启动机制即“群体输移”(collective motion)机制。概括来说此机制是指由运动的颗粒导

致床面更多的颗粒发生运动。

然而 Ancey 的实验装置较为简化(立面2维实验),所以能够直接测量视窗内的运动颗粒数目(即含沙浓度)。而对于一般的室内试验和野外测量而言,通常为3维的,难以直接测量运动颗粒个数,此时输沙量的测量和分析则成为主要的研究手段。其中输沙停时的概率密度分布函数(PDF)是分析推移质输沙统计特征的一个重要方式,若从 Einstein 理论出发,则该 PDF 应为指数分布。这也是一般建模过程中常用的假设<sup>[4]</sup>。而若在随机模型中考虑群体输移机制,则该统计特征将更为复杂,针对该问题进行具体的理论分析。

作者首先回顾了 Ancey 的随机理论,应用该理论推导出推移质输沙统计特征“输沙停时的 PDF”的理论解,此理论解比前人推导相比更为简洁、直接。并分别利用数值模拟和室内实验数据验证了该理论解的正确性。对理论解和实验中得到的尺度分

收稿日期:2012-12-14

基金项目:国家“973”计划资助项目(2011CB409901);国家自然科学基金重点资助项目(51039003)

作者简介:马宏博(1987—),男,博士生。研究方向:水力学与河流动力学。

\*通信联系人 E-mail: xdfu@thu.edu.cn

离现象进行了讨论。

### 1 Anccey 等模型回顾

Anccey 等对视窗中一定范围内的运动颗粒数目  $n$  (非负整数) 的概率分布  $P$  进行随机建模。这里运动颗粒数目等效为泥沙的浓度,以离散的数字来描述将便于后续建模。如图 1 所示,模型中包含有:起动(输入)事件、群体起动事件、沉降事件和输移事件。4 种事件,其概率分别为  $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$ 、 $\mu$ 、 $\sigma$  和  $\nu$ 。其数学原理可由如下方程表示:

$$P(n \rightarrow n + 1; \Delta t) = (\lambda + n\mu) \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(n \rightarrow n - 1; \Delta t) = (n\sigma + n\nu) \Delta t + o(\Delta t).$$

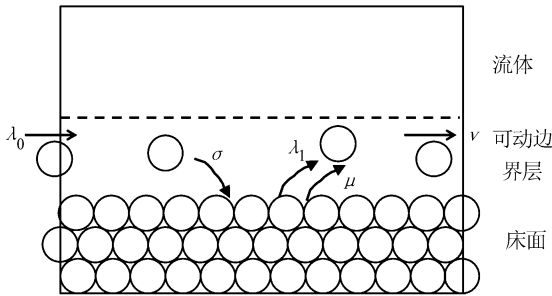


图 1 Anccey 等随机模型示意图

Fig. 1 Sketch of Anccey et al's stochastic model

Anccey 模型中的 3 个模型参数(即  $\lambda$ 、 $\sigma$  和  $\nu$ ) 在 Einstein 模型中已有物理定义<sup>[5]</sup>。 $\lambda$  为单位时间内从床面起动(从窗口外输入)的颗粒数目,该物理量主要与上游泥沙的输入量和水流剪切力有关; $\sigma$  为单位时间内群体颗粒从运动沉降为静止颗粒的数目,该物理量主要与泥沙沉速及水流剪切力有关; $\nu$  为单位时间内群体颗粒从窗口输出的数量,主要与水流流速有关;以上 3 个参数的确定方法在文献[2,5] 均有描述。而第 4 个参数  $\mu$  则为 Anccey 在其提出的模型中新引入的变量,其物理含义为群体颗粒在运动过程中由于撞击和扰动等因素导致更多泥沙同时运动的数量,该变量的物理机制在文献[6] 中有具体的讨论,文献[2,7] 分别给出其在不同测量方法下的确定方法。

小时间步长内,颗粒数目由状态  $n$  变为  $n + 1$  的转移概率为  $(\lambda + n\mu) \Delta t$ ,由状态  $n$  变为  $n - 1$  的转移概率为  $(n\sigma + n\nu) \Delta t$ ,综合以上方程,可得到控制方程(即主方程 master equation) 为:

$$\frac{\partial p(n, t)}{\partial t} = \alpha(n + 1)p(n + 1, t) + [\lambda + (n - 1)\mu]p(n - 1, t) - (\lambda + n\alpha + n\mu)p(n, t) \quad (1)$$

其中,  $\alpha = \sigma + \nu$ 。式(1)的一般解和恒定解在文献

[2] 中已经给出,并且与室内实验结果符合良好<sup>[1-2]</sup>。式(1)的恒定解为负二项分布,与 Einstein 理论得到的泊松分布相比,能够更好地描述推移质运动过程中的大幅度的随机涨落现象。

### 2 输沙停时 PDF 的求解

输沙停时为 2 次输移事件间的间隔时间  $\tau$ , 输移事件即为图 1 中定义的颗粒运动出视窗的过程。为了得到这个间隔时间,需要首先定义 Anccey 的 Markov 过程的一个子过程,即在一段时间内,其它事件均可发生,但没有输移事件发生的过程。从式(1)出发,去掉输移事件的发生概率可得式(2):

$$\frac{\partial p_{\text{mm}}(n, t)}{\partial t} = \sigma(n + 1)p_{\text{mm}}(n + 1, t) + [\lambda + (n - 1)\mu]p_{\text{mm}}(n - 1, t) - (\lambda + n\alpha + n\mu)p_{\text{mm}}(n, t) \quad (2)$$

其中,  $p_{\text{mm}}(n, t)$  为一段时间内没有输移事件发生的子过程的概率分布函数。注意式(2)与(1)的主要区别在于在右边第 1 项中并未考虑输移事件发生,该方程的一般解可由生成函数法得到,详见文献[8]。

在得到式(2)的解后,利用文献[9]中类似的思路对输移事件停时进行详细的求解。

第 1 步,推导出当 1 个输移事件在时间区间  $[t_1, t_1 + dt]$  发生的概率为:

$$f_1(t_1) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \nu(n_1)p(n_1, t) \quad (3)$$

式中,  $\nu(n_1) = \nu n_1$ 。

第 2 步,考虑当 1 个输移事件发生在  $[t_1, t_1 + dt]$ ,而另一个输移事件发生在  $[t_2, t_2 + dt]$  区间内的概率密度函数为  $f_2(t_1, t_2)$ ,中间没有其它的随机事件发生。不失一般性的可令  $t_2 > t_1$ 。当第 1 个事件发生后的瞬间只有  $n_1 - 1$  个颗粒剩余在视窗内,因此在  $t_2$  附近视窗内有  $n_2$  个颗粒的概率可由转移概率函数  $p_{\text{mm}}(n_2, t_2 | n_1 - 1, t_1)$  算出,转移概率函数  $p_{\text{mm}}(n_2, t_2 | n_1 - 1, t_1)$  函数可由式(2)加初始条件即式(4)得到:

$$p_{\text{mm}}(n_2, t_2 | n_1 - 1, t_1) = \delta(n_2, n_1 - 1) \quad (4)$$

经过上述第 1 步和第 2 步准备,输沙停时表达式为:

$$f_2(t_1, t_2) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \nu(n_2)p_{\text{mm}}(n_2, t_2 | n_1 - 1, t_1) \nu(n_1)p(n_1, t_1) \quad (5)$$

将  $\nu(n) = \nu n$  带入式(5)可得:

$$f_2(t_1, t_2) = \nu^2 \langle \langle n_2(t_2) | n_1(t_1) - 1 \rangle_{\text{nm}} n_1(t_1) \rangle \quad (6)$$

其中,  $\langle A \rangle$  表示随机变量  $A$  的期望值,  $\langle A | B \rangle_{\text{nm}}$  表示在事件  $B$  发生的条件下随机变量  $A$  的期望值, 其角标 nm(no migration) 表示在该随机过程为没有输移事件发生的随机过程即由式(2)控制的过程, 没有角标的则为式(1)控制的原始过程。

式(6) 以一个极为简明的表达式表达了两输移事件分别发生在  $t_1$  和  $t_2$  个时间点附近区间, 而没有其他输移事件发生在  $[t_1, t_2]$  区间的概率密度函数。而输沙停时  $\tau = |t_2 - t_1|$  可以直接由式(6) 得到。式(6) 的完整表达式为:

$$f_2(t_1, t_2) = \nu^2 \langle \langle n_2(t_2) | n_1(t_1) - 1 \rangle_{\text{nm}} n_1(t_1) \rangle = \nu^2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \left\{ G_{\text{nm}}(1, t_2 | z^{n_1(t_1)-1}, t = t_1) n_1 \times \text{NegBin}(n_1; \frac{\lambda}{\mu}, 1 - \frac{\mu}{\sigma + \nu}) \times \left[ \frac{\lambda}{\mu(z_2 - 1)} + (n_1 - 1) \frac{z_2 x' |_{z=1}}{z_2 x |_{z=1} + z_1} - \frac{n_1 - 1 + \lambda/\mu}{x |_{z=1} + 1} x' |_{z=1} \right] \right\} \quad (7)$$

其中,  $\text{NegBin}(n_1; \frac{\lambda}{\mu}, 1 - \frac{\mu}{\sigma + \nu})$  为负二项分布,

$$G_{\text{nm}}(1, t_2 | z^{n_1(t_1)-1}, t = t_1) = \left( \frac{z_2 - z_1}{z_2 - 1} \right)^{\lambda/\mu} \times \frac{(z_2 x |_{z=1} + z_1)^{n_1-1}}{(x |_{z=1} + 1)^{n_1-1+\lambda/\mu}} \times \exp(-\lambda(1 - z_1)(t_2 - t_1)),$$

$$x |_{z=1} = \frac{1 - z_1}{z_2 - 1} \exp(-\mu(z_2 - z_1)(t_2 - t_1)),$$

$$x' |_{z=1} = \frac{z_2 - z_1}{(z_2 - 1)^2} \exp(-\mu(z_2 - z_1)(t_2 - t_1))。$$

此处,  $G_{\text{nm}}$  为式(2) 中  $P_{\text{nm}}$  的生成函数。

### 3 理论解的验证

#### 3.1 数值解验证

为验证理论解的正确性, 作者对 Ancey 等的 Markov 模型进行 Monte Carlo 数值模拟。这里使用的模拟方法是 Gillespie algorithm, 详见文献[10]。从该过程中抽取输移事件子过程, 进行统计分析得到该模拟结果的 PDF 与理论解比较。从图 2 中可以看出, 模拟结果与理论界符合很好(模拟使用的参数为:  $\lambda = 0.01, \mu = 1.5, \sigma = 14, \nu = 2.8$ )。值得注意的是, 停时 PDF 与 Einstein 理论的指数分布的 PDF 相差甚远。该分布显现出双隆起形式的分布,

与指数分布单隆起的形式有所区别。Heyman 等<sup>[6]</sup> 将此归结为快、慢 2 种输移机制造成的尺度分离现象。其中慢输移机制即为水流剪切侵蚀, 而快输移机制则为水中运动颗粒导致的群体输移现象。

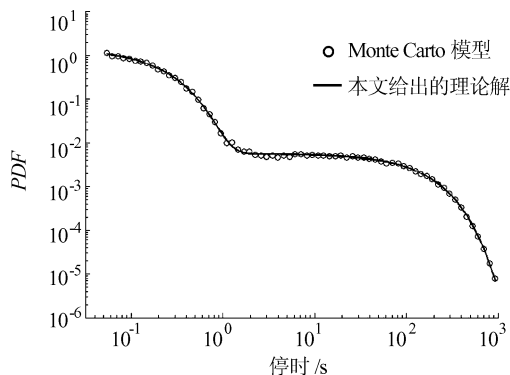


图 2 理论解与数值解比较

Fig. 2 Comparison between theoretical solution and numerical simulation

#### 3.2 实验验证

为验证该理论解, 一方面实验的运行时间需要足够长( $10^5$  s 以上), 另一方面对输移事件的识别需要较高的精度( $10^{-2} \sim 10^{-3}$  s)。Mettra 等<sup>[6-7,11]</sup> 建立的实验设备可以满足上述条件, 对该理论解进行验证。实验条件如表 1 所示, 表中:  $\tau_s$  为 Shields 剪切力;  $Fr$  为弗罗德数;  $\theta$  为坡度, %;  $\bar{\mu}$  为流体平均流速, m/s;  $\bar{h}$  为平均水深, cm;  $\bar{q}_s$  为平均输沙量, 颗粒数/s;  $\bar{T}$  为平均停时, s。

表 1 实验条件

Tab. 1 Experimental conditions

$\tau_s$	$Fr$	$\theta/\%$	$\bar{\mu}$ (m · s <sup>-1</sup> )	$\bar{h}$ cm	$\bar{q}_s$ (颗粒数 · s <sup>-1</sup> )	$\bar{T}$ /s
0.079	1.44	7	0.53	1.37	1.11	0.89

实验水槽宽 8 cm, 长 2.5 m。在水槽中平铺中粒径大小为  $(8 \pm 1.5)$  mm 的天然砂, 泥沙颗粒较粗, 但分布较窄可视作均匀沙。在陡坡条件下, 控制水流条件在 1 ~ 3 cm, 雷诺数约为 8 000。连续实验 48 h 保证得到的稳定。

水槽的进出口处布置有孔钢板, 在钢板上布置了振动感应装置, 使得进出水槽的泥沙均能撞击钢板上, 而水流可以自由通过。当泥沙撞击钢板时, 振动感应装置将记录其振动峰值, 通过滤波可精确得到撞击到钢板的泥沙颗粒的总数目和每颗泥沙撞击到钢板上的时间, 通过统计分析即可得到输沙停时的分布。

如图 3 所示, 由 Ancey 模型得到的输沙停时 PDF



的理论解对实验的符合程度显著优于指数分布解。这也说明,在实际的山区河流推移质运动中快、慢2种输沙机制也是客观存在的。图3中的参数取值为 $\lambda = 0.648$ ,  $\mu = 3.967$ ,  $\sigma = 3.663$ ,  $\nu = 0.366$ 。在图3中实验结果也呈现出双隆起的分布,理论界虽对实验结果符合较好,但在隆起位置及中间过渡区域上并没有完全吻合,这说明在Ancey模型中的快、慢机制仅在一定程度上描述了客观实际。而现实中的推移质运动机制更为复杂,如在不同时间尺度(快慢之间)的运动机制仍呈较为连续的过渡状态。

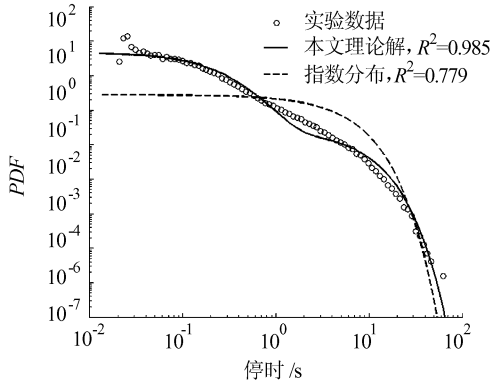


图3 理论解与实验数据比较

Fig. 3 Comparison between theoretical solution and experimental data

图3充分显示了Ancey随机理论模型和作者给出的输沙停时的理论解的优越性和正确性。应当指出的是,相比于Einstein模型<sup>[5]</sup>3个参数给出的结果,这里仅增加了一个物理机制即群体输移机制(参数 $\mu$ )便给出了图3的结果。虽然在有床面形态条件下各个参数的率定仍存在困难,但是这种困难无论对于Einstein模型还是Ancey模型都是一样的。对于模型参数率定方式的讨论可以进一步参考文献<sup>[7]</sup>。

## 4 结论

回顾了Ancey等提出的用于描述低推移质输沙率情况的Markov随机模型。从Ancey的模型出发推导出输沙停时PDF的理论解。该推导方式跟文献<sup>[6]</sup>的区别在于,从较为成熟的主方程(master equation)表达式<sup>[9]</sup>直接得到,推导过程更为清晰简单。并与室内实验数据对比,说明了此理论解比指数分布解更好地重现了室内试验结果。同时也说明,山区河流推移质输沙的快、慢时间尺度分离现象是客观存在的。不过现实中的推移质运动机制更为复杂,如在不同时间尺度(快慢之间)的运动机制仍呈

较为连续的过渡状态。这在今后的建模过程中需要进一步考虑。

## 参考文献:

- [1] Ancey C, Bohm T, Jodeau M, et al. Statistical description of sediment transport experiments [J]. *Physical Review E*, 2006, 74(1): 011302.
- [2] Ancey C, Davison A C, Bohm T, et al. Entrainment and motion of coarse particles in a shallow water stream down a steep slope [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2008, 595: 83 – 114.
- [3] Ancey C. Stochastic modeling in sediment dynamics: Exner equation for planar bed incipient bed load transport conditions [J]. *Journal of Geophysical Research-Earth Surface*, 2010, 115: F00A11.
- [4] Turowski J M. Probability distributions for bed form-dominated bed load transport: the Hamamori distribution revisited [J]. *Journal of Geophysical Research-Earth Surface*, 2011, 116: F02017.
- [5] Einstein H. The bed-load function for sediment transportation in open channel flows [R]. Technical Report 1026, United States Department of Agriculture, 1950.
- [6] Heyman J, Mettra F, Ma H B, et al. Statistics of bedload transport over steep slopes: Separation of time scales and collective motion [J]. *Geophysical Research Letters*, 2012, 40(1): 128 – 133.
- [7] Ma H B, Mettra F, Heyman J, et al. Multi-scale fluctuations of bedload transport rates over steep slope [C/OL]//Proceeding of AGU fall meeting. San Francisco, USA, 2012; EP23D-0856. <http://agu-fm12.abstractcentral.com/planner.jsp>.
- [8] Gardiner C W. Stochastic methods: A handbook for the natural and social sciences [M]. 4th ed. Berlin, Heidelberg, Germany: Springer, 2008.
- [9] Van Kampen N G. Stochastic process in chemistry and physics [M]. 3rd ed. Netherland: North Holland, 2007.
- [10] Gillespie D T. Markov processes: An introduction for physical scientists [M]. Salt Lake City, USA: Academic Press, Elsevier, 1991.
- [11] Mettra F, Heyman J, Ancey C. Characterization of bedload transport in steep-slope streams [C/OL]//Proceeding of EGU general assembly. Vienna, Austria, 2012; EGU2012-1191. <http://meetingorganizer.copernicus.org/EGU2012/meetingprogramme>.