第 45 卷 第 2 期　　四 川 大 学 学 报 (工 程 科 学 版)　　Vol. 45 No. 2
2013 年 3 月　　JOURNAL OF SICHUAN UNIVERSITY (ENGINEERING SCIENCE EDITION)　　Mar. 2013

文章编号:1009-3087(2013)02-0028-05

退化结构时变可靠性分析的随机过程新模型

张社荣,王　超*,孙　博
(天津大学 水利工程仿真与安全国家重点实验室,天津 300072)

摘　要:由于外部荷载和内部材料复杂时变特性的影响,服役结构的性能退化机制复杂。引入具有独立增量特性的 Gamma 过程来描述结构抗力的单调退化特征,采用 Poisson 随机过程和 Bernoulli 随机过程分别描述了结构所受荷载的变化,建立了抗力 - 荷载双随机过程体系;同时,基于穿越率的观点,提出了基于本文新模型的工程结构性能时变可靠性分析的计算方法,推求了结构时变可靠度表达式。分析表明,本文模型能够较好地描述退化结构随时间的抗力退化规律和荷载随机变化过程,可以为基于时变可靠度理论的结构评估和寿命预测提供理论依据。

关键词:退化结构;随机过程;时变可靠度;概率模型
中图分类号:TU311.2　　**文献标志码**:A

New Stochastic Process Model for the Time-varying Reliability Analysis of the Deteriorating Structures

ZHANG She-rong, WANG Chao, SUN Bo*
(State Key Lab. of Hydraulic Eng. Simulation and Safety, Tianjin Univ., Tianjin 300072, China)

Abstract: In order to study the deteriorating mechanism of the structure performance, the resistance of deteriorating structures was described by Gamma distribution which has a character of independent increment, the changing process of load was described by Poisson stochastic process and Bernoulli stochastic process respectively, then, the load-resistance double stochastic process system was established. Also, based on the conception of crossing rate, the new time-varying reliability analysis method for the engineering structure performance was put forward and the expression was calculated. Analysis showed that the new stochastic process model can better describe the degradation of resistance and the load variation process with time, so it can provide the theory basis for the evaluation of existing structures based on the time dependent reliability theory as while as the life prediction.

Key words: deteriorating structures; stochastic process; time-varying reliability; probabilistic model

结构的性能在其全生命周期内具有时变性,传统的确定性评估方法已不适应结构全生命周期设计的要求。随着水利工程领域全生命周期设计理念的发展,以概率分析为基础的水工结构生命全过程的时变可靠度成为实时评估结构安全可靠性的重要指标。结构性能总是向着导致工程结构恶化的方向发展,如何在结构设计阶段便实现结构性能可靠度变化规律的定量预测或动态剩余寿命预估,并据此确定合理的结构维护策略,已成为一个迫切需要解决的课题。

收稿日期:2012 - 07 - 06
基金项目:国家自然科学基金创新研究群体科学基金资助项目(51021004)
作者简介:张社荣(1960—),男,教授. 研究方向:水工结构可靠度;水电工程安全. E-mail:tjuzsr@126.com
* 通信联系人 E-mail:tjudam@126.com

在可靠度工程中,结构的失效定义为结构荷载效应超过其抗力的阈值。然而,结构的荷载效应和抗力并非一成不变的,而是随时间变化的随机过程,其随机性和时变性造成了结构可靠度变化的复杂性。若以 $R(t)$ 和 $S(t)$ 分别表示在 t 时刻结构的抗力随机过程和荷载效应随机过程,则结构的失效概率表示为 $P_f(T) = P\{R(t) \le S(t), t \in [0,T]\}$。中国《建筑结构设计统一标准》[1] 在结构抗力和荷载效应的处理上采用的可靠度计算模型多为半随机过程模型,即考虑结构的作用效应具有时间变异性,将其处理为随机过程,而将结构的抗力仍视为定值或随机变量。对于抗力退化的随机过程模型,目前主要有 3 种做法:一是用随机过程某时刻的随机变量代替整个随机过程;二是用某类确定性函数[2] 表示随时间变化的衰减,将非平稳随机过程转换为平稳随机过程模型,如 Mori 等[3] 对抗力与荷载效应随时

间的变化进行了研究，采用幂函数衰减模型描述结构抗力随时间的衰减量；三是简化考虑为各时点相关性的独立增量随机过程[4]，用当前时刻的抗力随机过程经过实测值修正进而得到既有结构在未来继续使用阶段的抗力随机过程模型。对于荷载的随机过程模型而言，针对静力计算体系，除与风载组合外，一般也是视荷载为恒载或者类似时变抗力形式的平稳化随机过程。于是，基于上述假定，目前多采用图 1 所示的模型描述抗力和荷载效应的随机过程及结构时变可靠度。

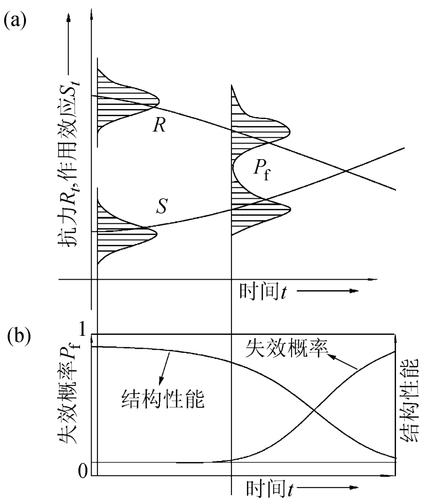

图 1　R－S 随机过程模型下时变可靠度曲线

Fig. 1　Time dependent reliability based on stochastic model of R－S

然而，将抗力非平稳随机过程采用确定性的衰减函数进行描述的平稳化随机过程模型并不合理。一方面，从混凝土成熟度理论来看，结构建成初期的抗力水平并不最高，结构抗力有一个先高后低的过程。另一方面，相对于抗力随时间的变化来说，荷载随时间的变化过程更加不确定，如地震、洪水等，属于导致工程结构性能退化的离散性突变荷载因素，在实际中更是需要大量观测数据才能确定其分布概型。

于是，许多学者对确定性函数模型进行了深入研究和改进：贡金鑫、赵国藩[5]提出简化考虑抗力变化的结构可靠度的分析方法；张俊芝、李桂青[6]分析了服役重力坝系统可靠度的变化过程；秦权、杨小刚[7]考虑退化结构功能函数随机过程，在假定活载为连续随机过程、Poisson 过程以及 Bernoulli 过程的条件下，对比研究了退化结构时变可靠度；杜斌等[8]考虑结构抗力为独立增量过程，并计算了抗力的自相关系数，建立了结构时变可靠度计算的全随机过程模型。

作者在前人工作的基础上，引入具有平稳独立增量特性的 Gamma 随机过程来描述结构抗力的单调下降退化过程，采用 Poisson 过程以及 Bernoulli 过程分别描述结构所受荷载作用的随机过程，建立了抗力－荷载双随机过程体系；同时，基于穿越率的观点，提出了基于本文新模型的工程结构时变可靠性分析计算方法。

1　抗力的 Gamma 随机过程描述

由于结构的性能总是向着不断恶化的方向发展，也就是说，结构本身抗力退化量是单调的随机过程，基于这个特点，目前多采用某类确定性函数表示结构抗力随时间的衰减，而 Abdel-Hameed[9] 指出 Gamma 随机过程模型更适宜来描述结构损坏的单调渐进过程，亦被认为是描述性能退化过程的首选方法[10]。因此，采用 Gamma 随机过程来描述抗力随时间的退化量。记随机变量 X 服从 Gamma 分布，其概率密度函数为：

$$f(x) = \frac{\lambda x^{r-1}}{\Gamma(r)}\exp(-\lambda x) \tag{1}$$

式中，$\Gamma(r)$ 为 Gamma 函数，$\Gamma(r) = \int_0^\infty t^{r-1}e^{-t}dt$ 且有 $\Gamma(r,x) = \int_{t=x}^\infty t^{r-1}e^{-t}dt$。其中，$r$ 和 λ 分别为形状参数和尺度参数，2 者均为正实数。若视形状参数 r 为时间变量 $r(t)$，则 Gamma 分布便可以表示一个随时间变化的随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$。该过程的数学性质和概率统计数字特征详见文献[11]，这里不再赘述，需要说明的是，当形状参数取为 1 时，式(1)就变为指数分布的概率密度函数。

根据 Gamma 分布的稠密性，当 $t \geq 0$ 时，总可以任意需要的精度拟合抗力的退化量。因此，引入上述服从 Gamma 分布的随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 来表示结构抗力的退化量，如图 2 所示。

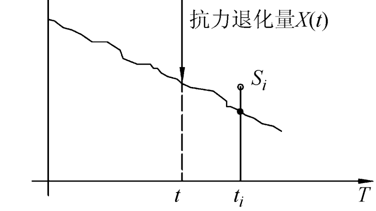

图 2　抗力退化量随机过程描述模型

Fig. 2　Description of random degradation process of resistance

此时,结构性能时变模型中抗力退化量的概率密度和统计特征满足:

$$f_{X(t)}(x) = \frac{\lambda x^{r(t)-1}}{\Gamma(r(t))}\exp(-\lambda x) \tag{2}$$

$$E(X(t)) = \frac{r(t)}{\lambda}, Var(X(t)) \frac{r(t)}{\lambda^2} \tag{3}$$

图2中,记结构初始抗力为 R_0,若先假定结构的荷载效应为一个定值 S,则在当前 t 时刻,结构的抗力可以表示为初始抗力与抗力退化量的差值,即有 $R(t) = R_0 - X(t)$,于是,结构失效概率可以表示为:

$$P_{\mathrm{f}}(t) = P\{R(t) \le S\} = P\{X(t) \ge R_0 - S\} \tag{4}$$

根据Gamma函数的性质,

$$P_{\mathrm{f}}(t) = P\{X(t) \ge R_0 - S\} = \int_{x=R_0-S}^{\infty} f_{X(t)}(x)\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(r(t),[R_0-S]\lambda)}{\Gamma(r(t))} \tag{5}$$

若用一个概率分布函数 $F(t)$ 来表示抗力退化为Gamma随机过程条件下 t 时间内失效的概率,则式(5)可以写为:

$$F(t) = P(T \le t) = P_{\mathrm{f}}(t) = \frac{\Gamma(r(t),[R_0-S]\lambda)}{\Gamma(r(t))} \tag{6}$$

2 荷载效应的随机过程描述

实际工程中,结构的荷载效应 S 也是一个随机过程,记为 $S(t)$。其极值的概率分布也是可靠度计算的关键。获得随机变量极值分布一般有2种方法:一是区间最大值方法,即用某一区间内变量的极值分布代表整体变量的分布特征;二是超阈值取样法,即研究穿越某一固定阈值的变量分布。显然,区间最大值方法可能会得不到真实的变量的全局性概率分布,因此,一般常选用超阈值取样方法获取结构所受荷载作用的随机变化过程及其分布。

如图3所示,记荷载效应的阈值为 S_0(或视为结构恒荷载的大小),每次超越阈值 S_0 的荷载(如地震、洪水、风载等)效应为一个独立同分布的随机变量 S_i,则有:

$$S(t) = S_0 + S_i(t) \tag{7}$$

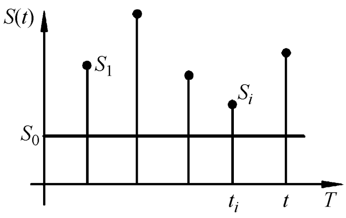

图3 荷载作用的随机过程描述模型

Fig. 3 Random process of the load model

在前人的研究中,对荷载穿越率常采用Poisson过程假定如文献[12],作者以此为基础,同时采用Poisson过程和Bernoulli过程进行对比。

1)荷载穿越率为Poisson随机过程情况

若荷载穿越荷载效应阈值的随机过程 $S_i(t)$ 服从Poisson分布,则在 $(0,t)$ 时间内,结构的荷载效应穿越其阈值 n 次的概率为:

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda' t)^n}{n!}\exp(-\lambda' t) \tag{8}$$

其中,$n = 0,1,2,\cdots$。

2)荷载穿越率为Bernoulli随机过程情况

与Poisson过程假定不同,在工程实际监测中,还可以根据多年监测资料,获得结构所受荷载超越某个固定阈值 S_0 一次的概率 P,于是,荷载穿越率便可以认为近似服从Bernoulli随机过程,根据二项分布的性质,在 $(0,t)$ 时间内,结构的荷载效应穿越其阈值 n 次的概率为:

$$P(N(t) = n) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n} \tag{9}$$

综合上述分析,并根据概率统计原理,荷载效应的随机过程 $S(t)$ 与 $S_i(t)$ 为概率同分布,于是,$S(t)$ 便可以采用Poisson过程和Bernoulli过程进行描述。

3 基于双随机过程模型的时变可靠度

基于前述的抗力和荷载效应的双随机过程,对全生命周期内未经修理的退化结构,其功能函数可以表示为:

$$Z(t) = R(t) - S(t) = R_0 - X(t) - S_0 - S_i(t) \tag{10}$$

首先考虑在 $(0,t)$ 时间内,S_i 到达 R_i 的次数为1次,如图4所示。假定 S_i 独立同分布,且 $S_i \sim G(s)$ ($G(s) = P(S_i \le s)$);相应的概率密度函数为 $g(s)$。于是在 t_i 时刻,结构荷载随机变量 S_i 未超越结构抗力 R_i(即 $R_i - S_i \ge 0$)的概率,亦即结构的可靠概率为:

$$P_{\mathrm{s}} = \int_0^{R_0-S_0-X(t)} \mathrm{d}G(s) \tag{11}$$

若在时间段 $[0,t]$ 内出现 n 次 S_i 到达 R_i 的情况,根据卷积定理,2个相互独立的同分布的随机变量之和的密度函数为它们的密度函数的卷积,于是,在 $[0,t]$ 时间内,S_i 到达 R_i 的次数为 n 次的条件下结构的时变可靠度为:

$$P_s(T|N(t)=n)=\prod_{i=1}^{n}\int_0^{R_0-S_0-X(t)}\mathrm{d}G(s)=\prod_{i=1}^{n}G(R_0-S_0-X(t))\tag{12}$$

再考虑 n 的全部可能性,假定 n 个 Poisson 穿越荷载 S_i 在 $[0,t]$ 内均匀分布,且相互独立。由全概率公式可得:

$$P_s(T)=\sum_{0}^{\infty}P_s(T|N(t)=n)P(N(t)=n)\tag{13}$$

进一步,若考虑式(12)中的结构初始抗力 R_0 和荷载阈值 S_0 也是随机变量,当荷载穿越荷载效应阈值的随机过程服从 Poisson 分布,同时考虑抗力退化量的概率密度和统计特征式(2)~(3),用抗力退化量 $X(t)$ 的期望值 $E(X(t))$ 近似表征 t 时刻的 $X(t)$,式(13)可以写为:

$$P_s(T)=\int_0^{\infty}f_{R_0}(r_0)\mathrm{d}r_0\int_{-\infty}^{\infty}E(\exp(-\lambda T_s))f_{S_0}(s_0)\mathrm{d}s_0\tag{14}$$

式中,

$$T_s=t-\int_0^t G(R_0-S_0-X(t))\mathrm{d}t\tag{15}$$

同理,当荷载穿越荷载效应阈值的随机过程服从 Bernoulli 随机过程时,结构在 $[0,t]$ 不修理的时变可靠度为:

$$P_s(T)=\int_0^{\infty}f_{R_0}(r_0)\mathrm{d}r_0\sum_{n=0}^{N}C_N^n p^n\ (1-p)^{N-n}\times E\left(\left(\frac{1}{t}\int_0^t G(R_0-S_0-X(t))\mathrm{d}t\right)^n\right)f_{S_0}(s_0)\mathrm{d}s_0\tag{16}$$

式中,C_N^n 为二项式系数,p 为荷载超越某个固定阈值 S_0 的概率。

这样,就建立了基于荷载效应和抗力双随机过程的退化结构时变可靠度分析模型。通过该模型,借助 1 阶可靠度(FORM)或者 2 阶可靠度(SORM)方法以及 MATLAB 积分计算等工具便可计算得退化结构时变可靠度指标及其失效概率。

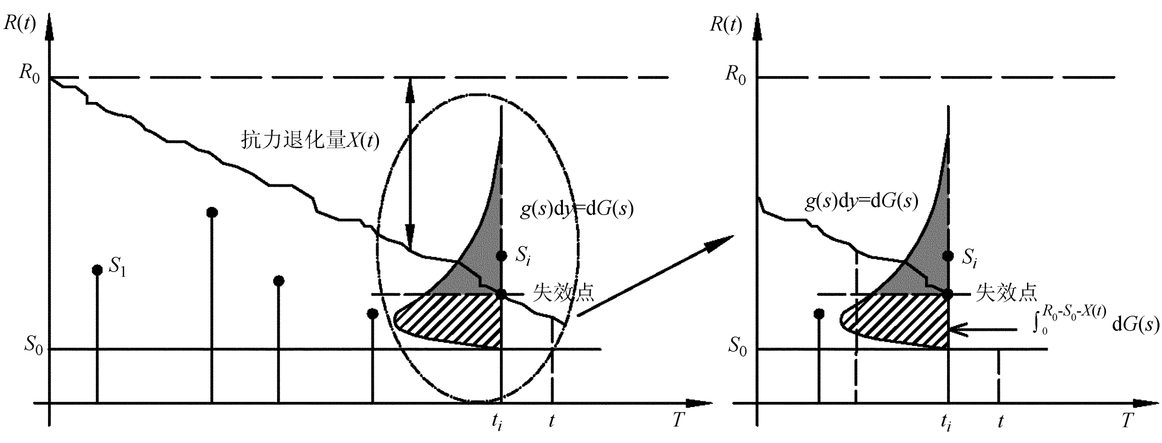

图 4　新随机过程模型下时变可靠度计算简图

Fig. 4　Time dependent reliability based on new stochastic model

4　算例分析

为说明本文模型的应用,将某工程问题抽象为如下算例进行分析。

某结构性能初始抗力记为 R_0,服从均值为 100%,变异系数(CV)为 0.2 的对数正态分布;所受的荷载固定阈值 S_0 为 40%,假定荷载随机过程为 Poisson 过程,n 个穿越荷载 S_i 在 $[0,t]$ 内相互独立,每次超阈值的荷载变量 S_i 服从指数分布 $G(s,\theta)$,其中 $\theta=0.05$;根据文献[13]的研究,描述抗力随时间的退化量的 Gamma 随机过程中,形状参数常用幂函数表示为 $r(t)=at$,若 $t=50$ a 时抗力退化量的期望为 0.4,变异系数为 0.2,则有:

$$E(X(50))=\frac{50a}{\lambda}=0.4,$$

$$CV(X(50))=\frac{Var(X(50))}{E(X(50))}=\frac{1}{\sqrt{50a}}=0.2\tag{17}$$

由此,可以得到 $a=0.5$,$\lambda=62.5$;结构初始抗力随机变量 R_0 记为 $u\sim H(u)$,根据式(14)~(15),在 $[0,t]$ 时间内,结构的时变可靠度为:

$$P_s(t)=\int_0^{\infty}f_{R_0}(r_0)\mathrm{d}r_0\int_{-\infty}^{\infty}E(\exp(-\lambda(50-\int_0^{50}G(R_0-S_0-X(t))\mathrm{d}t)))f_{S_0}(s_0)\mathrm{d}s_0\tag{18}$$

根据式(2),本算例中抗力衰减量 $X(t)$ 的密度函数为:

$$f_{X(t)}(x) = \frac{62.5x^{0.5t-1}}{\Gamma(0.5t)}\exp(-62.5x) \quad (19)$$

同时 $G(s) = 1 - \exp(-0.05s)$，代入式(18)则有：

$$P_s(t) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}H(u) \times$$
$$E(\exp(-62.5 \times (50 - \int_0^{50} G(0.6 - X(t))\mathrm{d}t))) \quad (20)$$

分析式(20)可知，随着时间 t 的增大，抗力退化量 $X(t)$ 是单调递增的，而 $G(s)$ 是增函数，于是结构的时变可靠度 $P_s(t)$ 是逐渐递减的，即随时间的增大而逐渐减小，这与实际情况相符合。同时，经计算，$P_s(0) = 0.999\ 999\ 713$，相应的失效概率为 $P_f(0) = 2.87 \times 10^{-7}$；$P_s(50) = 0.999\ 862\ 73$，相应的失效概率为 $P_f(50) = 1.372\ 7 \times 10^{-4}$。

5 结 论

现有的结构时变可靠性分析模型基本上是基于抗力和荷载效应相互独立性假设或者确定性函数假设的半随机过程模型，这对工程结构在实际使用过程中的抗力和荷载效应的时变性描述并不合理。

主要工作是构建一个适用于实际工程时变可靠性分析的理论分析模型。通过引入具有独立增量性质的 Gamma 分布来描述结构抗力退化的单调随机过程，分别采用 Poisson 随机过程和 Bernoulli 随机过程描述了结构所受荷载效应的变化过程，对确定性函数过程模型进行了改进。基于荷载效应穿越率的观点，建立了结构时变可靠性分析的抗力－荷载双随机过程新模型，并推求了假定随机过程条件下的结构时变可靠度表达式，进而提出了基于本文新模型的工程结构时变可靠性分析计算方法。

需要说明的是，超静定结构由于塑性发展和徐变发展存在同一构件不同截面间的内力重分布以及不同构件间的内力重分布，结构抗力也应考虑这些因素。另外，对于含有大量随机变量的实际工程应用分析，研究模型的近似计算或数值模拟解法是进一步研究的方向。

参考文献：

[1]中华人民共和国建设部. GB50068—2001 建筑结构可靠度设计统一标准[S]. 北京：中国建筑工业出版社，2001.

[2]李桂青，李秋胜. 工程结构时变可靠度理论及其应用[M]. 北京：科学出版社，2003.

[3]Mori Y, Ellingwood B R. Reliability-based service-life as assessment of aging concrete structures[J]. Journal of Structural Engineering, 1993, 119(5): 1600－1621.

[4]Mori Y, Ellingwood B R. Maintaining reliability of concrete structures I: Role of inspection/repair[J]. Journal of Structural Engineering, 1994, 120(3): 824－845.

[5]Gong Jinxin, Zhao Guofan. Reliability analysis for deteriorating structures[J]. Journal of Building Structures, 1998, 19(5): 43－51.[贡金鑫，赵国藩. 考虑抗力随时间变化的结构可靠度分析[J]. 建筑结构学报，1998, 19(5): 43－51.]

[6]Zhang Junzhi, Li Guiqing. A study on system reliability and expectancy of gravity dam in service[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2000, 31(4): 40－45.[张俊芝，李桂青. 服役重力坝系统可靠度及概率寿命探讨[J]. 水利学报，2000, 31(4): 40－45.]

[7]Qin Quan, Yang Xiaogang. Time-dependent reliability of deteriorating structures[J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 2005, 45(6): 733－736.[秦权，杨小刚. 退化结构时变可靠度分析[J]. 清华大学学报：自然科学版，2005, 45(6): 733－736.]

[8]Du Bin, Xiang Tianyu, Zhao Renda. Fully stochastic analysis method for structural time-independent reliability[J]. Engineering Science, 2010, 12(3): 108－112.[杜斌，向天宇，赵人达. 结构时变可靠度计算的全随机过程模型[J]. 中国工程科学，2010, 12(3): 108－112.]

[9]Abdel-Hameed M. A gamma wear process[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1975, R-24(2): 152－153.

[10]贾希胜. 以可靠性为中心的维修决策模型[M]. 北京：国防工业出版社，2007: 116－118.

[11]Singpurwalla N. Gamma processes and their generalizations: An overview[M]//Cooke R, Mendel M, Vrijling J K. Engineering Probabilistic Design and Maintenance for Flood Protection. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997: 67－73.

[12]Van Noortwijk J M, Van der Weideb J A M, Kallen M J, et al. Gamma processes and peaks-over-threshold distributions for time-dependent reliability[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2007(92): 1651－1658.

[13]Ellingwood B R, Mori Y. Probabilistic methods for condition assessment and life prediction of concrete structures in nuclear power plants[J]. Nuclear Engineering and Design, 1993, 142(2/3): 155－166.

(编辑 赵 婧)